

---

## 8. SINTEZA SISTEMA SA BESKONAČNIM IMPULSNIM ODZIVOM

---

Postupak projektovanja i realizacije nekog diskretnog sistema sastoji se iz četiri faze:

1. U *fazi zadavanja specifikacija* se na osnovu analize problema zadaju amplitudska i/ili fazna karakteristika diskretnog sistema koje treba ostvariti, kao i dozvoljene tolerancije u realizaciji ovih karakteristika.

2. U *fazi sinteze* se određuju koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu funkcije prenosa date izrazom (6.41), ili položaji polova i nula funkcije prenosa, na takav način da se zadate specifikacije ostvare sa greškom koja leži unutar dozvoljenih tolerancija.

3. U *fazi realizacije* vrši se izbor realizacione strukture i određivanje koeficijenata množača. Pored kriterijuma ekonomičnosti, prilikom izbora se vodi računa i o osetljivosti realizacije na konačnu tačnost predstavljanja podataka u digitalnim sistemima.

4. U *fazi implementacije* vrši se softverska ili hardverska realizacija funkcije prenosa određene u fazi 2, korišćenjem realizacione strukture izabrane u fazi 3.

U ovoj glavi biće reči o postupcima sinteze funkcije prenosa čiji je impulsni odziv beskonačan (IIR tipa). Pošto funkcija prenosa koja treba da se sintetizuje najčešće ima filtarsko svojstvo, tj. pojačava ili propušta bez slabljenja signale iz nekog opsega učestanosti, dok slabi signale iz nekog drugog opsega učestanosti, faza 2 se obično naziva *sinteza filtarskih funkcija* ili *postupak aproksimacije*.

Najčešće se sinteza digitalnog filtra IIR tipa izvodi pogodnom *transformacijom funkcije prenosa* odgovarajućeg analognog filtra. Ovakav prilaz postupku sinteze opravdan je iz nekoliko razloga. Pre svega, postupak sinteze analognih filtara (naročito propusnika niskih učestanosti) se proučava već više od pedeset godina tako da postoje razvijeni postupci sinteze za mnoge važne praktične slučajeve. Drugo, u mnogim važnim slučajevima polovi ili koeficijenti funkcije prenosa analognih filtara dati su eksplicitnim formulama. Treće, za slučajeve za koje ne postoje eksplicitne formule za funkciju prenosa sačinjene su opsežne tabele koje služe kao pomoć pri projektovanju, a u poslednje vreme pojavili su se i računarski programi za interaktivno sprovođenje postupka sinteze.

Postupkom transformacije analogne funkcije prenosa u digitalnu funkciju prenosa treba da se očuvaju neka važna svojstva analognog sistema. Pre svega, transformacija mora biti *racionalna*, tj. polazeći od analogne funkcije prenosa koja je racionalna funkcija kompleksne učestanosti  $s$ , treba da se dobije racionalna funkcija kompleksne učestanosti  $z$ . Drugo, zbog održanja stabilnosti sistema, polovi analogne funkcije prenosa koji leže u levoj polovini ravni kompleksne učestanosti  $s$ , moraju se preslikati unutar jediničnog kruga u ravni kompleksne učestanosti  $z$ . Treće, poželjno je da se transformacijom ne povećava red funkcije prenosa.

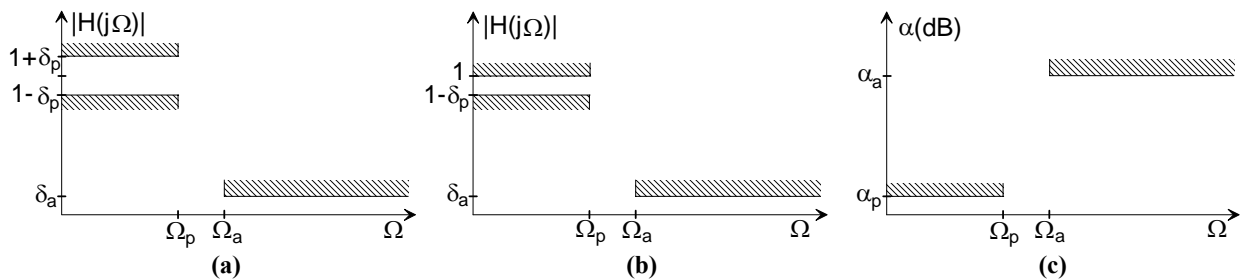
Zavisno od toga kojoj se karakteristikici filtra pri preslikavanju posveti najveća pažnja dobijaju se razni metodi transformacije koji će biti opisani u ovoj glavi. Prvo će ukratko biti prikazana sinteza najvažnijih analognih funkcija prenosa, a zatim najvažnije transformacione metode. Posle toga biće prikazane i neke direktne metode sinteze u  $z$  domenu koje se ređe koriste, ali mogu biti korisne u slučaju nestandardnih specifikacija za koje ne postoji jednostavno rešenje u analognim sistemima.

## 8.1 SINTEZA ANALOGNIH FILTARSKIH FUNKCIJA

Karakteristike funkcije prenosa koju treba sintetizovati, ili kraće, *specifikacije*, zadaju se najčešće u frekvencijskom domenu. Kod selektivnih funkcija prenosa, koje su poznate pod nazivom *filtarske funkcije*, razlikuju se *propusni opseg*, *nepropusni opseg* i *prelazna zona*. U propusnom opsegu signal se u sistemu pojačava, propušta neizmenjen ili vrlo malo slabi. Nasuprot tome, u nepropusnom opsegu se signal znatno oslabljuje. U prelaznoj zoni funkcija prenosa se ne specificira, ali se najčešće zahteva da amplitudska karakteristika bude monotono opadajuća. Broj propusnih opsega, odnosno nepropusnih opsega može biti i veći od jedan.

Najjednostavniji slučaj za zadavanje specifikacija je u slučaju propusnika niskih učestanosti, ili kraće NF filtra. Grafički prikaz tzv. *šeme tolerancija* ili *gabarita* za amplitudsku karakteristiku NF filtra prikazan je na slici 8.1a. Sa slike se uočava da su gabariti određeni sa četiri karakteristične veličine:

1. Granična učestanost propusnog opsega  $\omega_p$ ,
2. Granična učestanost nepropusnog opsega  $\omega_a$ ,
3. Varijacija amplitude u propusnom opsegu  $\delta_p$ ,
4. Varijacija amplitude u nepropusnom opsegu  $\delta_a$ .



Slika 8.1 Gabariti za NF filtarsku funkciju: (a) i (b) amplitudska karakteristika, (c) slabljenje.

U nekim slučajevima, naročito ako se radi o pasivnim filtrima, nije dozvoljeno da amplitudska karakteristika ima veću vrednost od jedinice, pa gabariti izgledaju kao na slici 8.1b. Međutim, najčešći način zadavanja gabarita filtarskih funkcija je prikazan na slici 8.1c, gde se na ordinati prikazuje recipročna vrednost amplitudske karakteristike izražena u dB, odnosno *slabljenje*. U tom slučaju se umesto varijacije amplitude u propusnom opsegu  $\delta_p$  specificira maksimalno slabljenje u propusnom opsegu  $\alpha_p$ , dok se umesto varijacije amplitude u nepropusnom opsegu  $\delta_a$  specificira minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu  $\alpha_a$ . Veza između veličina  $\delta_p$  i  $\alpha_p$  data je izrazima:

$$\alpha_p = 20 \log \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}, \quad \delta_p = \frac{10^{0.05\alpha_p} - 1}{10^{0.05\alpha_p} + 1} \quad (8.1)$$

ako su gabariti amplitudske karakteristike kao na slici 8.1a, odnosno izrazima:

$$\alpha_p = 20 \log \frac{1}{1 - \delta_p}, \quad \delta_p = 1 - 10^{-0.05\alpha_p} \quad (8.2)$$

ako su gabariti amplitudske karakteristike kao na slici 8.1b.

Veza između veličina  $\delta_a$  i  $\alpha_a$  u oba slučaja data je izrazima:

$$\alpha_a = -20 \log \delta_a, \quad \delta_a = 10^{-0.05\alpha_a} \quad (8.3)$$

Fazna karakteristika se najčešće ne specificira kod selektivnih filtara.

Na osnovu zadatih specifikacija treba odrediti stabilnu racionalnu funkciju prenosa čija amplitudska karakteristika leži unutar zadatih gabarita. U matematici je taj zadatak poznat kao problem *aproksimacije funkcija*. U narednom izlaganju biće opisano nekoliko postupaka aproksimacije koji su našli najveću primenu u praksi. U svim slučajevima biće tretirana sinteza NF filtra, zbog toga što se u tom slučaju mogu dobiti eksplicitne formule za polove i nule funkcije prenosa. Sintaza ostalih tipičnih funkcija prenosa (propusnika visokih učestanosti - VF, propusnika opsega - PO i nepropusnika opsega - NO) vrši se najčešće transformacijom NF funkcije prenosa.

### 8.1.1 BATERVORTOVA APROKSIMACIJA

*Batervortova* (Butterworth) *aproksimacija* idealne amplitudske karakteristike NF filtra je izvedena pod pretpostavkom da je amplitudska maksimalno ravna u koordinatnom početku. U slučaju funkcije  $N$ -tog reda to znači da je prvih  $(2N - 1)$  izvoda kvadrata amplitudske karakteristike jednako nuli za  $\omega = 0$ . Drugi uslov koji se postavlja kod Batervortove aproksimacije je striktna monotonost amplitudske karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu. Kvadrat amplitudske karakteristike koja zadovoljava oba postavljena uslova dat je izrazom:

$$|H_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}} \quad (8.4)$$

gde je  $\varepsilon$  parametar koji određuje slabljenje na granici propusnog opsega, tj.:

$$10 \log(1 + \varepsilon^2) = \alpha_p \quad (8.5)$$

odnosno,

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1} \quad (8.6)$$

Osim parametra  $\varepsilon$  potrebno je odrediti i red filtarske funkcije  $N$ . Red se određuje na osnovu specifikacija za nepropusni opseg. Na granici nepropusnog opsega važi:

$$10 \log[1 + \varepsilon^2 (\omega_a/\omega_p)^{2N}] = \alpha_a \quad (8.7)$$

odakle se, korišćenjem (8.6) dobija:

$$N \geq \frac{\log \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}}{2 \log(\omega_a/\omega_p)} = \frac{\log D}{2 \log(1/k)} \quad (8.8)$$

gde su *faktor diskriminacije*  $D$  i *faktor selektivnosti*  $k$  dati izrazima:

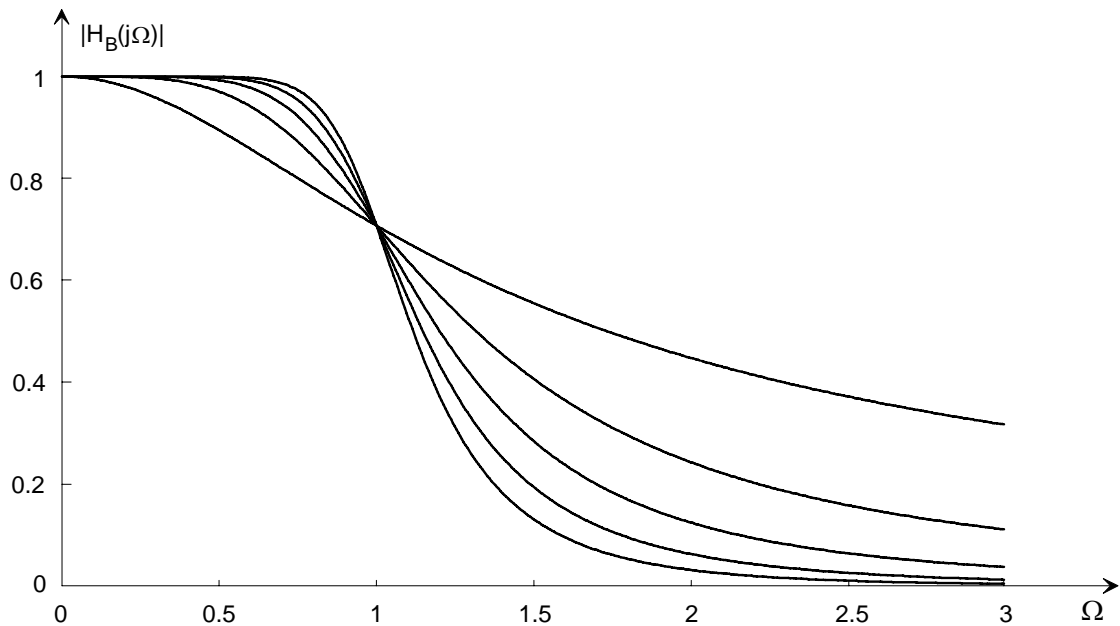
$$D = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \quad (8.9)$$

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a} \quad (8.10)$$

Vrednost desne strane nejednakosti (8.8) najčešće nije ceo broj, pa se u sintezi za red  $N$  usvaja prvi ceo broj koji je veći od izračunate vrednosti. Povećanje reda ima kao posledicu povećano slabljenje na granici nepropusnog opsega. U retkim slučajevima, kada je to potrebno, može se smanjiti vrednost parametra  $\varepsilon$  tako da se smanji slabljenje na granici propusnog opsega. Nova vrednost parametra  $\varepsilon$  je:

$$\varepsilon^2 = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{(\omega_a/\omega_p)^{2N}} \quad (8.11)$$

Na slici 8.2 prikazan je oblik amplitudske karakteristike koji se dobija Batervortovom aproksimacijom za  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  i  $\varepsilon = 1$ . Uočava se da sa povećanjem reda amplitudska karakteristika postaje ravnija u propusnom opsegu, strmija u prelaznoj zoni i selektivnija u nepropusnom opsegu.



Slika 8.2 Amplitudska karakteristika Batervortovog filtra za  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  i  $\varepsilon = 1$ .

Sledeći korak u sintezi filtarske funkcije na osnovu Batervortove aproksimacije je određivanje polova funkcije prenosa. Analitičkim proširenjem  $s = j\omega$ , iz (8.4) se dobija:

$$H_B(s)H_B(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (s/j\omega_p)^{2N}} \quad (8.12)$$

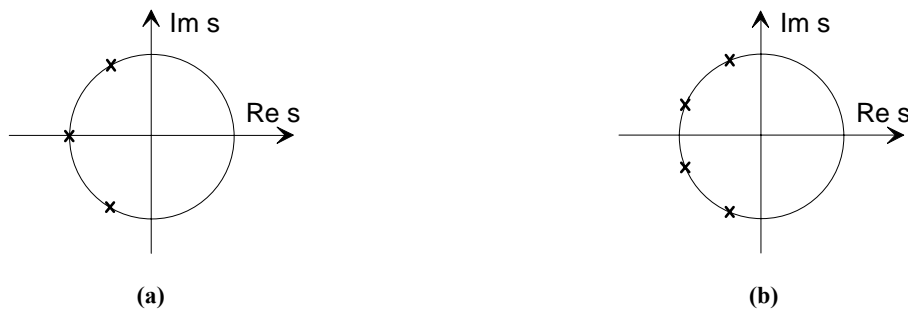
Polinom u imeniocu izraza (8.12) ima  $2N$  korena koji su dati izrazom:

$$s_k = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} e^{j\pi \frac{2k+N-1}{2N}} = \frac{\omega_p}{\sqrt[2N]{\varepsilon}} \left[ \cos\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) + j \sin\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (8.13)$$

Očigledno je da su *korenovi raspoređeni na krugu* poluprečnika  $\omega_p/\sqrt[N]{\varepsilon}$  sa jednakim ugaonim rastojanjima  $\pi/N$ , simetrično u odnosu na realnu i imaginarnu osu. Zbog uslova stabilnosti, koji zahteva da svi polovi funkcije prenosa leže u levoj polovini ravni kompleksne učestanosti  $s$ , polovi funkcije  $H_B(s)$  su korenovi iz leve poluravni ( $1 \leq k \leq N$ ), dok su polovi funkcije  $H_B(-s)$  korenovi iz desne poluravni ( $N+1 \leq k \leq 2N$ ). Dakle, funkcija prenosa dobijena Batervortovom aproksimacijom može se napisati u obliku:

$$H_B(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, \quad H_0 = \prod_{k=1}^N (s_k) \quad (8.14)$$

Na slici 8.3a je prikazan raspored polova za  $N = 3$ , dok je na slici 8.3b prikazan raspored polova za  $N = 4$ .



Slika 8.3 Raspored polova Batervortovog filtra za  $\varepsilon = 1$ : (a)  $N = 3$ , (b)  $N = 4$ .

Iz amplitudske karakteristike Batervortovog filtra može se videti da je greška aproksimacije vrlo mala u donjem delu propusnog opsega kao i u gornjem delu nepropusnog opsega. Bolje karakteristike u prelaznoj zoni, kao i niži red filtra mogu se dobiti ako se greška aproksimacije pravilnije rasporedi u propusnom opsegu, u nepropusnom opsegu, ili u oba. U prvom slučaju dobijaju se tzv. Čebiševljevi filtri prve vrste, u drugom Čebiševljevi filtri druge vrste, a u trećem eliptički filtri.

### 8.1.2 ČEBIŠEVLJEVA APROKSIMACIJA PRVE VRSTE

Kvadrat amplitudske karakteristike Čebiševljevog filtra prve vrste dat je izrazom:

$$|H_C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (8.15)$$

gde je  $T_N(x)$  Čebiševljev polinom, definisan izrazom:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (8.16)$$

ili rekurentnom formulom:

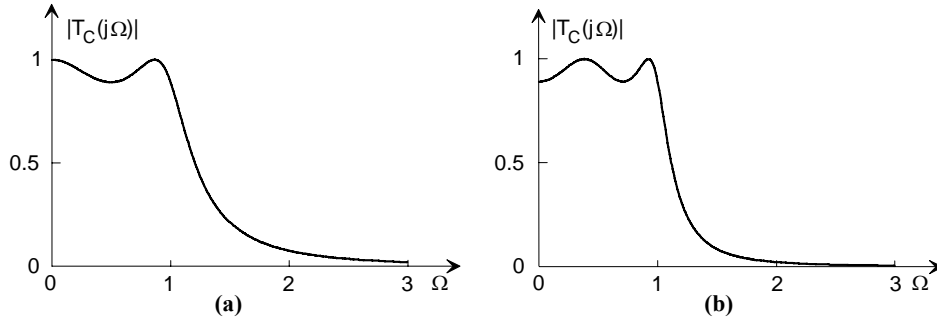
$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad (8.17)$$

Postupak određivanja karakterističnih parametara  $\varepsilon$  i  $N$  sličan je kao kod Batervortove aproksimacije. Kako je  $T_N(1) = 1$ , vrednost parametra  $\varepsilon$  je određena izrazom (8.6). Za red funkcije prenosa  $N$  se dobija:

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{D}}{\cosh^{-1}(1/k)} \quad (8.18)$$

gde su veličine  $D$  i  $k$  određene izrazima (8.9) i (8.10).

Amplitudske karakteristike Čebiševljevih filtara za  $N = 3$  i  $N = 4$  i  $\varepsilon = 0.508$  ( $\alpha_p = 1$  dB) prikazane su na slici 8.4.



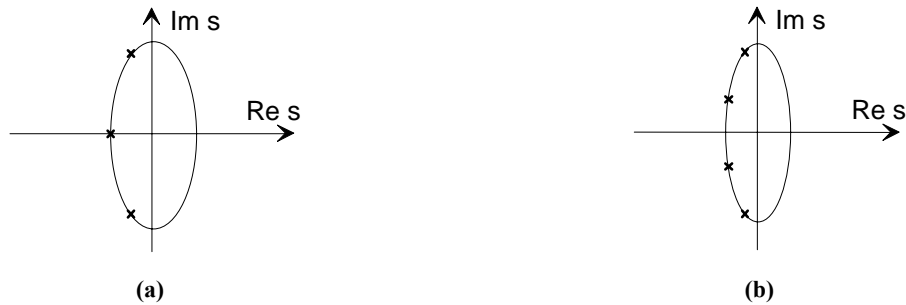
Slika 8.4 Amplitudske karakteristike Čebiševljevih filtara za  $\varepsilon = 0.508$ : (a)  $N = 3$ , (b)  $N = 4$ .

Polovi Čebiševljevog filtra leže na elipsi u levoj polovini  $s$  ravni. Realni i imaginarni deo polova  $s_k = \sigma_k + j\omega_k$  dati su izrazima:

$$\sigma_k = \sinh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi\right) \quad (8.19)$$

$$\omega_k = \cosh\left(\frac{1}{N} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi\right) \quad (8.20)$$

gde je  $k = 1, 2, \dots, N$ . Raspored polova Čebiševljevih filtara za  $N = 3$  i  $N = 4$  u kompleksnoj ravni prikazan je na slici 8.5.



Slika 8.5 Raspored polova Čebiševljevog filtra: (a)  $N = 3$ , (b)  $N = 4$ .

Funkcija prenosa je, onda, data izrazom:

$$H_C(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad (8.21)$$

gde je:

$$H_0 = \begin{cases} 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ parno} \\ \prod_{k=1}^N (-s_k) & N \text{ neparno} \end{cases} \quad (8.22)$$

čime je obezbeđeno da minimalno slabljenje u propusnom opsegu bude jednako nuli.

### 8.1.3 ČEBIŠEVljeVA APROKSIMACIJA DRUGE VRSTE

Kod Čebiševljevog filtra druge vrste uslovi zaravnjenja amplitudske karakteristike su raspoređeni u nepropusnom opsegu. Zato je amplitudska karakteristika u propusnom opsegu monotona, dok u nepropusnom opsegu ima oscilatorno ponašanje. Kvadrat amplitudske karakteristike Čebiševljevog filtra druge vrste može se dobiti ako se od jedinice oduzme kvadrat amplitudske karakteristike Čebiševljevog filtra prve vrste:

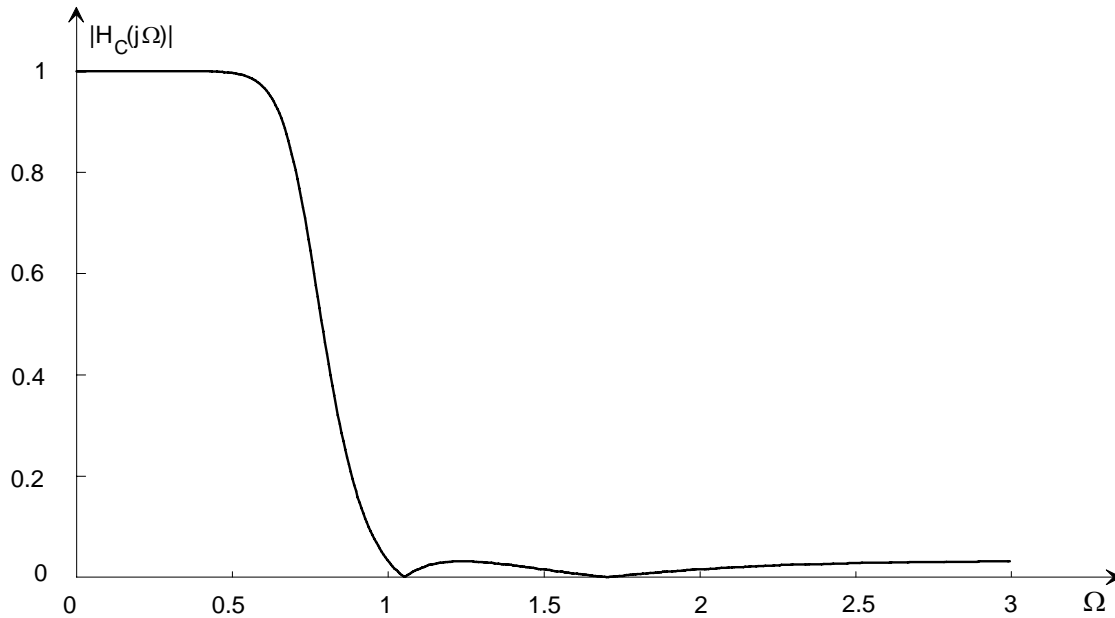
$$1 - |H_C(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)} = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (8.23)$$

čime se propusni opseg pretvara u nepropusni i obratno. Ako se uz to i argument Čebiševljevog polinoma  $\omega/\omega_p$  zameni svojom recipročnom vrednošću  $\omega_p/\omega$ , dobija se traženi kvadrat amplitudske karakteristike Čebiševljevog filtra druge vrste ili *inverznog Čebiševljevog filtra*:

$$|H_{IC}(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\omega_p/\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_p/\omega)} \quad (8.24)$$

Amplitudska karakteristika inverznog Čebiševljevog filtra je prikazana na slici 8.6. Analizom amplitudske karakteristike može se pokazati da je ona maksimalno ravna u koordinatnom početku. Minimumi i maksimumi amplitudske karakteristike u nepropusnom opsegu dati su izrazom:

$$\omega_k = \sec\left(\frac{k\pi}{2N}\right), \quad k = 1, \dots, N \quad (8.25)$$



Slika 8.6 Amplitudska karakteristika inverznog Čebiševljevog filtra za  $N = 5$  i  $\alpha_a = 30\text{dB}$  ( $\varepsilon = 0.03164$ ).

Polovi inverznog Čebiševljenog filtra  $s_k$  dobijaju se inverzijom polova Čebiševljevog filtra projektovanog za iste vrednosti  $N$  i  $\varepsilon$  prema formuli:

$$(s_k)_{IC} = \frac{\omega_p}{(s_k)_C} \quad (8.26)$$

tako da se funkcija prenosa inverznog Čebiševljevog filtra može, prema (8.24), napisati u obliku:

$$H_{IC}(s) = H_0 \frac{\prod_{k=1}^N (s^2 + \omega_k^2)}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, \quad H_0 = \frac{\prod_{k=1}^N (-s_k)}{\prod_{k=2i}^N \omega_k^2} \quad (8.27)$$

Potreban red Čebiševljevog filtra druge vrste određen je jednačinom (8.18).

#### 8.1.4 ELIPTIČKA APROKSIMACIJA

Zajednička karakteristika Batervortove i Čebiševljeve aproksimacije je da su odlične u nepropusnom opsegu, ali po cenu široke prelazne zone. Inverzni Čebiševljevi filtri imaju manje slabljenje u nepropusnom opsegu ali je slabljenje u gornjem delu propusnog opsega često suviše veliko. Najbolja prelazna zona se dobija ako se greška aproksimacije idealne karakteristike ravnomerno rasporedi u propusnom i nepropusnom opsegu. Rezultujuća amplitudska karakteristika ima oscilatorni karakter i u propusnom opsegu gde osciluje između 1 i  $1 - \delta_p$ , i u nepropusnom opsegu gde osciluje između nule i  $\delta_a$ . Takva aproksimacija naziva se *eliptička aproksimacija* jer se u postupku sinteze koriste eliptičke funkcije, ili Kauerova aproksimacija, prema autoru (Cauer) koji ju je prvi formulisao. Kvadrat amplitudske karakteristike eliptičkog filtra dat je izrazom:

$$|H_E(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (8.28)$$

gde je  $C_N(x)$  tzv. *Čebiševljeva racionalna funkcija* koja obezbeđuje oscilatorno ponašanje amplitudske karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu i monotoni karakter u prelaznoj zoni. Opšti oblik funkcije  $C_N(x)$  je:

$$C_N(x) = Kx \frac{(x^2 - \omega_{z1}^2)(x^2 - \omega_{z2}^2) \cdots (x^2 - \omega_{zL}^2)}{(x^2 - \omega_{p1}^2)(x^2 - \omega_{p2}^2) \cdots (x^2 - \omega_{pL}^2)} \quad (8.29)$$

gde član  $x$  postoji samo kod funkcija neparnog reda, dok je broj kvadratnih članova u brojiocu i imeniocu isti,  $L = \lfloor N/2 \rfloor$ . Međutim, određivanje tačnih položaja nula i polova funkcije  $C_N(x)$  zahteva korišćenje Jakobijevih (Jacobi) eliptičkih funkcija, odnosno, Ležandrovih (Legendre) eliptičkih integrala prve vrste koji se retko proučavaju u kursevima više matematike. Osim toga, čak i kada su poznati položaji nula i polova funkcije  $C_N(x)$ , ostaje problem određivanja polova funkcije  $H(s)$  koji zahteva određivanje korena polinoma u imeniocu funkcije  $H(s)H(-s)$ . Zbog toga se eliptički filtri projektuju korišćenjem obimnih tabela koje obuhvataju slučajeve značajne za praksu [S-1, Z-3], korišćenjem računarskih programa za izračunavanje eliptičkih funkcija i određivanje korena polinoma [G-17] ili korišćenjem iterativnih računarskih postupaka [D-1]. U daljem izlaganju će zbog kompletnosti biti izložen jedan algoritam za projektovanje [G-21, A-10], koji eliptičke funkcije izračunava aproksimirajući ih brzo konvergentnim redovima.

Postupak sinteze NF filtra započinje zadavanjem specifikacija  $\omega_p, \omega_a, \alpha_p$  i  $\alpha_a$ . Ako se funkcija prenosa NF eliptičkog filtra napiše u obliku:

$$H_E(s) = \frac{H_0}{D_0(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}} \quad (8.30)$$

gde je:



$$r = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & N \text{ neparno} \\ \frac{N}{2} & N \text{ parno} \end{cases} \quad (8.31)$$

$$D_0(s) = \begin{cases} s + \sigma_0 & N \text{ neparno} \\ 1 & N \text{ parno} \end{cases} \quad (8.32)$$

onda se koeficijenti  $A_{0i}$ ,  $B_{0i}$ ,  $B_{li}$ ,  $H_0$  i  $\sigma_0$  mogu odrediti sledećim postupkom:

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a} \quad (8.33)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (8.34)$$

$$q_0 = \frac{1 - \sqrt{k'}}{2} \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad (8.35)$$

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13} \quad (8.36)$$

$$D = \frac{10^{0.1\alpha_a} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \quad (8.37)$$

$$N \geq \frac{\log 16D}{\log(1/q)} \quad (8.38)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2N} \ln \frac{10^{0.05\alpha_p} + 1}{10^{0.05\alpha_p} - 1} \quad (8.39)$$

$$\sigma_0 = \left| \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cosh 2m\Lambda} \right| \quad (8.40)$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)} \quad (8.41)$$

$$\omega_i = \frac{2q^{1/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin \frac{(2m+1)\pi\mu}{N}}{1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q \cos \frac{2m\pi\mu}{N}}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (8.42)$$

gde je:

$$\mu = \begin{cases} i & N \text{ neparno} \\ i - \frac{1}{2} & N \text{ parno} \end{cases} \quad (8.43)$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\omega_i^2) \left(1 - \frac{\omega_i^2}{k}\right)} \quad (8.44)$$

$$A_{0i} = \frac{1}{\omega_i^2} \quad (8.45)$$

$$B_{0i} = \frac{(\sigma_0 V_i)^2 + (\omega_i W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \omega_i^2)^2} \quad (8.46)$$

$$B_{1i} = \frac{2\sigma_0 V_i}{1 + \sigma_0^2 \omega_i^2} \quad (8.47)$$

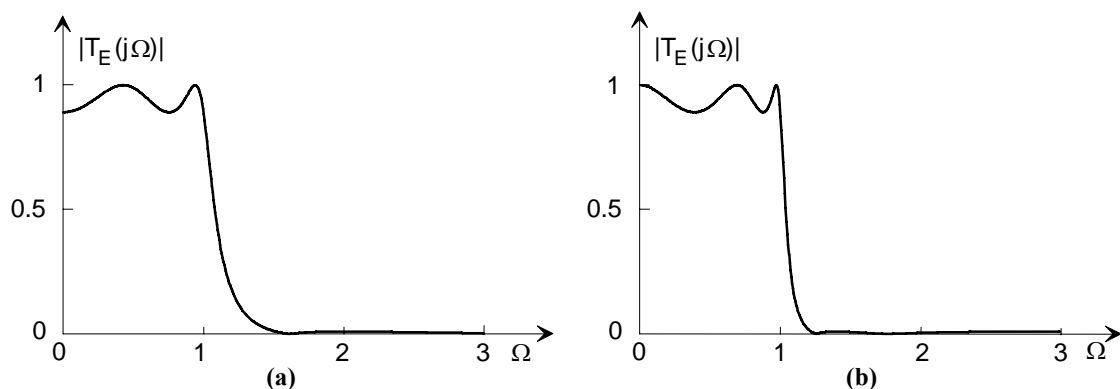
$$H_0 = \begin{cases} \sigma_0 \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & N \text{ neparno} \\ 10^{-0.05\alpha_p} \prod_{i=1}^r \frac{B_{0i}}{A_{0i}} & N \text{ parno} \end{cases} \quad (8.48)$$

Primećuje se da u formulama (8.40) i (8.42) treba sumirati beskonačne redove. Međutim, ovi redovi su vrlo brzo konvergentni tako da je u većini slučajeva dovoljno sumirati svega tri do četiri člana. Iako je celi postupak moguće sprovesti koristeći kalkulator, zbog obimnosti izračunavanja pogodnije je koristiti računar i odgovarajuće programe.

Opisani postupak obezbeđuje tačnu realizaciju tri od četiri polazna parametra:  $\omega_p$ ,  $\omega_a$  i  $\alpha_p$ . Realizovano slabljenje u nepropusnom opsegu je veće od specificiranog i može se izračunati prema formuli:

$$\alpha_a = 10 \log \left( \frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{16q^n} + 1 \right) \quad (8.49)$$

Na slici 8.7 su prikazane amplitudske karakteristike eliptičkih filtara četvrtog i petog reda sa parametrima  $\omega_p = 1$  rad/s,  $\alpha_p = 1$  dB i  $\alpha_a = 30$  dB.



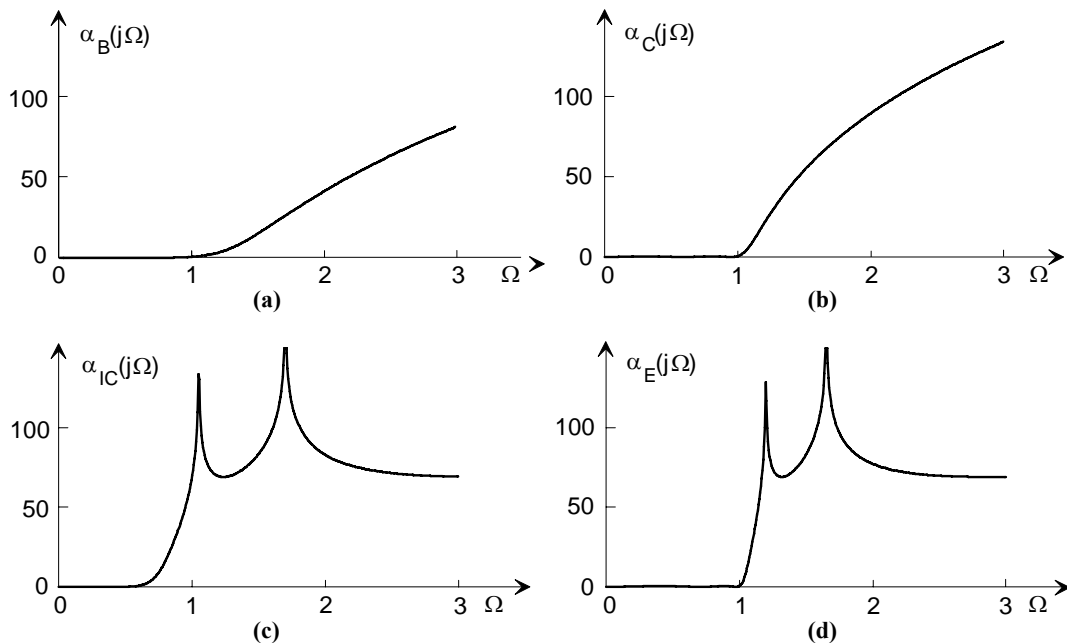
Slika 8.7 Amplitudske karakteristika eliptičkih filtara: (a)  $N = 4$ , (b)  $N = 5$ .

### 8.1.5 POREĐENJE APROKSIMACIJA AMPLITUDSKE KARAKTERISTIKE

U prethodnom izlaganju su opisane četiri najčešće korišćene aproksimacije amplitudske karakteristike idealnog NF filtra. U vezi sa tim može se postaviti nekoliko pitanja. Postoji li

najbolja aproksimacija? Ako ne postoji, koju aproksimaciju treba koristiti u konkretnom slučaju? Šta je sa faznom karakteristikom o kojoj nije vođeno računa u postupku aproksimacije? Ima li način aproksimacije veze sa realizacijom, itd. Odgovori na ova pitanja nisu jednostavni, ali se mnogi korisni zaključci mogu izvući poređenjem karakteristika opisanih filtara.

Vrlo korisni zaključci se dobijaju poređenjem karakteristika filtara istog reda. Neka su specifikacije filtara koji se porede:  $N = 5$ ,  $\alpha_p = 0.25$  dB,  $\alpha_a = 40$  dB. Amplitudske karakteristike (slabljenje u dB) dobijene pomoću četiri opisana postupka aproksimacije su prikazane na slici 8.8a-d.



**Slika 8.8 Amplitudske karakteristike funkcija petog reda: (a) Batervortova aproksimacija, (b) Čebiševljeva aproksimacija, (c) Inverzna Čebiševljeva aproksimacija, (d) Eliptička aproksimacija.**

Kao što se vidi, učestanost  $\omega_p$  nema isto značenje kod svih tipova aproksimacije. Da bi poređenje bilo pod istim uslovima mora se izvršiti normalizacija učestanosti tako da sve četiri karakteristike na nekoj učestanosti (recimo  $\omega = 1$ ) imaju isto slabljenje (recimo 3 dB). Kada se izvrši normalizacija učestanosti dobijaju se karakteristike prikazane na slici 8.9. Sa slike 8.9, kao i iz odgovarajućih numeričkih podataka, mogu se izvesti sledeći zaključci:

1. U donjem delu propusnog opsega (u okolini  $\omega = 0$ ) najbolji je inverzni Čebiševljev filter, a za njim sledi Batervortova aproksimacija. Čebiševljev i eliptički filter imaju približno slične karakteristike.

2. U gornjem delu propusnog opsega najbolji su eliptički i Čebiševljev filter dok su inverzni Čebiševljev i Batervortov filter znatno lošiji jer unose veće slabljenje.

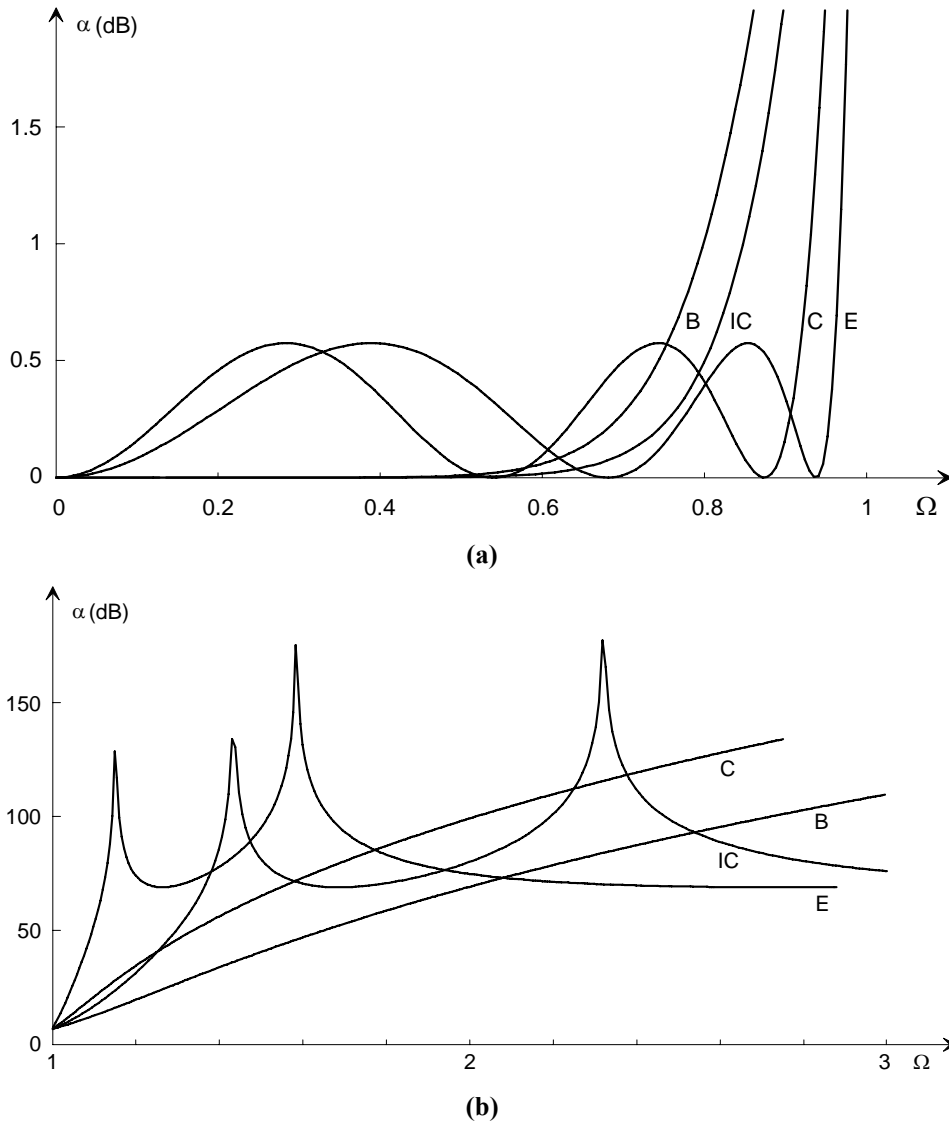
3. U prelaznoj zoni, prema kriterijumu širine prelazne zone, najbolji je eliptički filter, za njim sledi inverzni Čebiševljev filter, onda Čebiševljev, i na kraju, Batervortov filter.

4. U nepropusnom opsegu Čebiševljev i Batervortov filter obezbeđuju veće slabljenje od inverznog Čebiševljevog ili eliptičkog filtra. Međutim, ova činjenica ne predstavlja nikakvu prednost ove dve aproksimacije jer je kod svih aproksimacija zadovoljen uslov da je u nepropusnom opsegu slabljenje veće od minimalne vrednosti  $\alpha_a$ .

5. Vrlo važnu karakteristiku funkcije prenosa predstavlja  $Q$  faktor kritičnog para polova definisan izrazom:

$$Q_k = \frac{\sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2}}{2\sigma_k} \quad (8.50)$$

gde se pod kritičnim parom polova podrazumeva onaj koji je najbliži imaginarnoj osi. Ova karakteristika je važna zbog toga što su za realizaciju većeg  $Q$  faktora potrebne kvalitetnije komponente (sa manjim gubicima u pasivnoj tehnologiji i manjim tolerancijama u aktivnoj tehnologiji). U slučaju digitalnih filtera, veći  $Q$  faktor zahteva veći broj bita u digitalnoj reči. U pogledu  $Q$  faktora, najbolji je Batervortov filter, obe vrste Čebiševljevih filtera su identične, dok je eliptički filter najgori.



Slika 8.9 Normalizovane amplitudske karakteristike filtera sa slike 8.8:  
(a) propusni opseg, (b) nepropusni opseg.

6. Što se tiče jednostavnosti realizacije, u svim tehnologijama je jednostavnije realizovati polinomske filtre (čija funkcija prenosa nema nule) kakvi su Batervortov i Čebiševljev, jer je potreban manji broj elemenata u analognim realizacijama ili manji broj množača u digitalnoj realizaciji.

7. U pogledu odstupanja od linearnosti fazne karakteristike, odnosno odstupanja karakteristike grupnog kašnjenja od konstante, najbolji je Batervortov filter, za njim sledi inverzni

Čebiševljev filter, dok Čebiševljev i eliptički filter imaju znatno lošije karakteristike naročito u gornjem delu propusnog opsega.

Druga vrsta poređenja različitih metoda aproksimacije amplitudske karakteristike može se izvesti tako što se određuje minimalni red funkcije koja zadovoljava traženi gabarit. Neka je potrebno odrediti funkciju prenosa koja zadovoljava karakteristike:  $\omega_p = 1$ ,  $\omega_a = 1.5$ ,  $\alpha_p = 0.5$  dB,  $\alpha_a = 50$  dB. Red funkcije prenosa koja zadovoljava tražene zahteve mora biti  $N = 17$  za Batervortovu aproksimaciju,  $N = 8$  za Čebiševljevu i inverznu Čebiševljevu aproksimaciju i  $N = 5$  za eliptičku aproksimaciju. Dakle, eliptička aproksimacija daje rešenje najnižeg reda, koje je najčešće i najekonomičnije za realizaciju. Cena koja je plaćena je, naravno, loša fazna karakteristika.

### 8.1.6 BESELOVA APROKSIMACIJA

U prethodna četiri odeljka razmatrani su postupci aproksimacije idealne amplitudske karakteristike. Aproksimacija idealne (linearne) fazne karakteristike, odnosno, konstantnog grupnog kašnjenja može se ostvariti primenom tzv. Beselovih (Bessel) polinoma u formiranju funkcije prenosa. Neka je funkcija prenosa data izrazom:

$$H(s) = \frac{B_0}{\sum_{i=0}^N B_i s^i} = \frac{B_0}{s^N B(1/s)} \quad (8.51)$$

gde je  $B(s)$  Beselov polinom čiji su koeficijenti:

$$B_i = \frac{(2N-i)!}{2^{N-i} i!(N-i)!} \quad (8.52)$$

Analizu amplitudske karakteristike i karakteristike grupnog kašnjenja funkcije (8.51) najlakše je izvršiti korišćenjem Beselovih funkcija. Tako se dolazi do zaključka da funkcija (8.51) ima maksimalno zaravnjenu karakteristiku grupnog kašnjenja u koordinatnom početku. Zbog toga je na niskim učestanostima grupno kašnjenje praktično konstantno.

Amplitudska karakteristika Beselovih filtera je monotona funkcija učestanosti ali ima znatno lošiju selektivnost od Batervortove funkcije prenosa. Dakle, na osnovu dosadašnjih zapažanja može se izvesti jedan važan zaključak: selektivne filterne funkcije imaju lošu faznu karakteristiku i obratno. Ovaj zaključak je opšte prirode i važi za sve funkcije prenosa minimalne faze (sa nulama i polovima u levoj polovini  $s$  ravni), kod kojih su amplitudska i fazna karakteristika jednoznačno povezane.

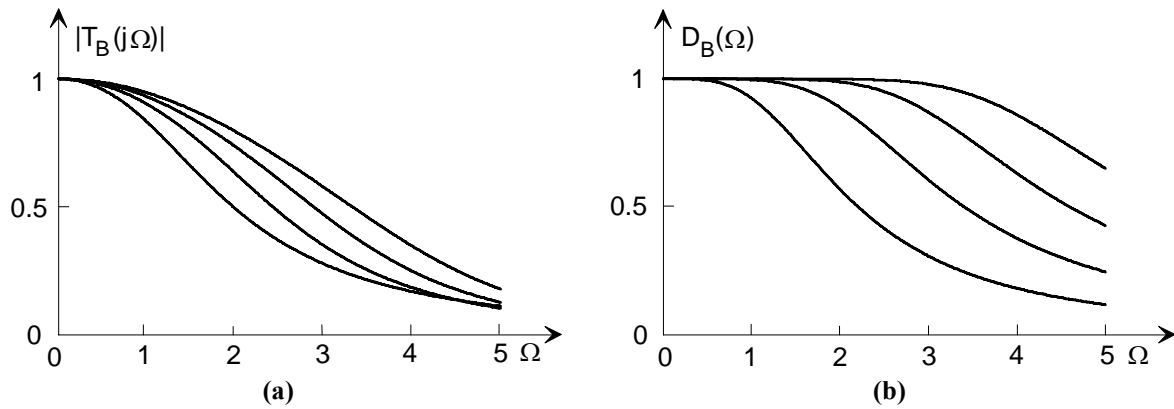
Na slici 8.10 su prikazane amplitudske karakteristike i karakteristike grupnog kašnjenja Beselovih filtera za  $N = 2, 3, 4, 5$  koje su normalizovane tako da bude  $\tau(0) = 1$  s.

### 8.1.7 TRANSFORMACIJE UČESTANOSTI

U prethodnim poglavljima razmatrana je isključivo sinteza NF filternih funkcija. Pri tome se za graničnu učestanost  $\Omega_p$  najčešće uzima vrednost od 1 rad/s čime se dobija *normalizovani* ili *prototipski* NF filter. Ukoliko je potrebno sintetizovati NF filter sa drugom graničnom učestanošću, ili neki drugi tip filtra, mora se izvršiti *transformacija učestanosti* oblika:

$$s = f(\hat{s}) \quad (8.53)$$

gde je  $s$  kompleksna učestanost u funkciji prenosa normalizovanog NF filtra, dok je  $\hat{s}$  kompleksna promenljiva u funkciji prenosa posle transformacije.



Slika 8.10 Beselovi filtri,  $N = 2, 3, 4, 5$ : (a) amplitudske karakteristike, (b) karakteristike grupnog kašnjenja.

### 8.1.7.1 Transformacija NF→NF

Neka je poznata funkcija prenosa normalizovanog NF filtra,  $H_{NF}(s)$ , čije su granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega  $\omega_p$  i  $\omega_a$ . Neka opšta transformacija (8.53) ima oblik:

$$s = a\hat{s} \quad (8.54)$$

odnosno,

$$\hat{s} = \frac{s}{a} \quad (8.55)$$

Iz (8.55) se, smenama  $s = j\omega$  i  $\hat{s} = j\hat{\omega}$ , lako dobijaju nove vrednosti graničnih učestanosti:

$$\hat{\omega}_p = \frac{\omega_p}{a} \quad (8.56)$$

$$\hat{\omega}_a = \frac{\omega_a}{a} \quad (8.57)$$

Postupak transformacije ili *denormalizacije učestanosti* se, dakle, izvodi na taj način što se prvo iz (8.56) ili (8.57) odredi denormalizaciona konstanta  $a$ , a zatim se izvrši preslikavanje nula i polova funkcije prenosa, prema (8.55), ili transformacija cele funkcije prema:

$$H_{NF}(\hat{s}) = H_{NF}(s)|_{s=a\hat{s}} \quad (8.58)$$

### 8.1.7.2 Transformacija NF→VF

Transformacija prototipskog NF filtra u VF filter može se izvesti preslikavanjem:

$$s = \frac{a}{\hat{s}} \quad (8.59)$$

odnosno,

$$\hat{s} = \frac{a}{s} \quad (8.60)$$

Granične učestanosti se onda preslikavaju prema izrazima:

$$\hat{\omega}_p = \frac{a}{\omega_p} \quad (8.61)$$

$$\hat{\omega}_a = \frac{a}{\omega_a} \quad (8.62)$$

Postupak transformacije se izvodi tako što se iz (8.61) ili (8.62) odredi konstanta  $a$ , a zatim se izvrši preslikavanje nula i polova funkcije prenosa prema (8.60) ili transformacija cele funkcije prema:

$$H_{VF}(\hat{s}) = H_{NF}(s) \Big|_{s=a/\hat{s}} \quad (8.63)$$

### 8.1.7.3 Transformacija NF→PO

Transformacija funkcije prenosa NF filtra u funkciju prenosa propusnika opsega (PO) čija je centralna učestanost  $\omega_0$  i širina propusnog opsega  $B$ , izvodi se prema formuli:

$$s = \frac{1}{B} \left( \hat{s} + \frac{\omega_0^2}{\hat{s}} \right) = \frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}} \quad (8.64)$$

odnosno,

$$\hat{s}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( Bs \pm \sqrt{B^2 s^2 - 4\omega_0^2} \right) \quad (8.65)$$

Smenama  $s = j\omega$  i  $\hat{s} = j\hat{\omega}$  dobijaju se preslikane granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega:

$$\hat{\omega}_{p1}, \hat{\omega}_{p2} = \frac{1}{2} \left( \pm \omega_p B + \sqrt{\omega_p^2 B^2 + 4\omega_0^2} \right) \quad (8.66)$$

$$\hat{\omega}_{a1}, \hat{\omega}_{a2} = \frac{1}{2} \left( \pm \omega_a B + \sqrt{\omega_a^2 B^2 + 4\omega_0^2} \right) \quad (8.67)$$

Transformacija se izvodi tako što se izvrši preslikavanje nula i polova funkcije prenosa prema (8.65) ili, češće, transformacijom cele funkcije prema:

$$H_{PO}(\hat{s}) = H_{NF}(s) \Big|_{s=\frac{\hat{s}^2 + \omega_0^2}{B\hat{s}}} \quad (8.68)$$

Iz jednačine (8.64) se vidi da se transformacijom NF filtra u propusnik opsega učestanosti udvostručava red funkcije prenosa. To znači da se ovakvom transformacijom mogu dobiti samo funkcije prenosa parnog reda. Osim toga, opisana transformacija uvodi još jedno ograničenje. Iz jednačina (8.66) i (8.67) se lako dobija da važi jednakost:

$$\hat{\omega}_{p1} \hat{\omega}_{p2} = \hat{\omega}_{a1} \hat{\omega}_{a2} = \omega_0^2 \quad (8.69)$$

koja se naziva *uslov geometrijske simetrije graničnih učestanosti*.

### 8.1.7.4 Transformacija NF→NO

Transformacija funkcije prenosa NF filtra u funkciju prenosa nepropusnika opsega (NO), čija je centralna učestanost  $\omega_0$  i širina nepropusnog opsega  $B$ , izvodi se prema formuli:

$$s = \frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2 + \omega_0^2} \quad (8.70)$$

odnosno,

$$\hat{s}_{1,2} = \frac{1}{2s} \left( B \pm \sqrt{B^2 - 4\omega_0^2 s^2} \right) \quad (8.71)$$

Smenama  $s = j\omega$  i  $\hat{s} = j\hat{\omega}$  dobijaju se preslikane granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega:

$$\hat{\omega}_{p1}, \hat{\omega}_{p2} = \frac{1}{2\omega_p} \left( B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_0^2 \omega_p^2} \right) \quad (8.72)$$

$$\hat{\omega}_{a1}, \hat{\omega}_{a2} = \frac{1}{2\omega_a} \left( B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_0^2 \omega_a^2} \right) \quad (8.73)$$

Transformacija se izvodi tako što se izvrši preslikavanje nula i polova funkcije prenosa prema (8.71) ili, češće, transformacijom cele funkcije prema:

$$H_{NO}(\hat{s}) = H_{NF}(s) \Big|_{s=\frac{B\hat{s}}{\hat{s}^2+\omega_0^2}} \quad (8.74)$$

I ova transformacija učestanosti udvostručava red funkcije prenosa. Takođe važi ograničenje da funkcija prenosa može biti samo parnog reda i uslov geometrijske simetrije graničnih učestanosti.

## 8.2 IMPULSNO INVARIJANTNA TRANSFORMACIJA

Osnovna ideja primenjena kod impulsno invarijantne transformacije analogne funkcije prenosa je da se impulsni odziv diskretnog sistema  $h[n]$  dobije diskretizacijom impulsnog odziva analognog sistema  $h_a(t)$ , tj.

$$h[n] = h_a(nT), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.75)$$

gde je  $T$  perioda odabiranja.

Interesantno je ispitati šta se dešava u frekvencijskom domenu. Na osnovu relacije (3.11) spektar diskretnog signala  $h[n]$ , koji ujedno predstavlja i frekvencijski odziv diskretnog sistema  $H(e^{j\Omega})$ , dat je izrazom:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left[ j(\omega + k\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left[ j \left( \frac{\Omega}{T} + \frac{2k\pi}{T} \right) \right] \quad (8.76)$$

Dakle, frekvencijski odziv diskretnog sistema predstavlja sumu periodično ponovljenih frekvencijskih spektara analognog sistema. Ako je:

$$H_a(j\omega) \approx 0, \quad |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \quad (8.77)$$



onda je:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} H_a[j(\omega + k\omega_s)] \approx 0, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (8.78)$$

pa se konačno dobija:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\omega) = \frac{1}{T} H_a\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (8.79)$$

odnosno, frekvencijski odziv diskretnog sistema dobijenog impulsno invarijantnom transformacijom analognog sistema razlikuje se samo za multiplikativnu konstantu od frekvencijskog odziva analognog sistema, ako je zadovoljen uslov da je frekvencijski odziv analognog sistema ograničen, a učestanost odabiranja je bar dva puta veća od najviše komponente u spektru analognog sistema.

Kada je uslov za primenu impulsno invarijantne transformacije (8.77) zadovoljen, i ako su polovi analogne funkcije prenosa prosti, može se pisati:

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - p_i} \quad (8.80)$$

Impulsni odziv analognog sistema određuje se primenom inverzne Laplasove transformacije čime se dobija:

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t} \quad (8.81)$$

Iz uslova (8.75) sledi:

$$h_a(nT) = h[n] = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i nT} \quad (8.82)$$

Primenom  $z$ -transformacije na (8.82), konačno se dobija funkcija prenosa diskretnog sistema:

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})} \quad (8.83)$$

Iz izraza (8.83) se vidi da se polovi analognog sistema  $p_i$  preslikavaju u polove digitalnog sistema  $z_i$  prema formuli:

$$z_i = e^{p_i T} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)T} \quad (8.84)$$

dok se položaj nula diskretnog sistema ne može predvideti. Treba primetiti da preslikavanje (8.84) nije obostrano jednoznačno. Svaka tačka iz analognog  $s$  domena jednoznačno se preslikava u  $z$  domen, ali obrnuto ne važi. Naime, jedna tačka iz  $z$  domena,  $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ , preslikava se u skup tačaka  $p_i = \ln r_i / T + j(\theta_i + 2k\pi) / T$ , koje leže na pravoj koja je paralelna sa imaginarnom osom.

Preslikavanje (8.84) zadovoljava sve tri tražene osobine. Pošto konjugovano kompleksni par polova iz  $s$  ravni preslikavanjem (8.84) daje konjugovano kompleksni par polova u  $z$  ravni, koeficijenti diskretne funkcije prenosa su realni, tj. transformacija je racionalna. Transformacija je takođe stabilna jer se polovi stabilnog analognog sistema, kod kojih je  $\sigma_i < 0$ , preslikavaju u polove diskretnog sistema unutar jediničnog kruga. Treće, ne povećava se red funkcije prenosa.

Kod impulsno invarijantne transformacije, veza između analogne učestanosti  $\omega$  i digitalne učestanosti  $\Omega$  je linearna, tj.  $\Omega = \omega T = 2\pi f / f_s = 2\pi F$ , gde je  $F$  normalizovana učestanost. Dakle, ako je zadovoljen uslov ograničenosti frekvencijskog odziva (8.77), amplitudska i fazna karakteristika analognog sistema su očuvane preslikavanjem. Na žalost, neke važne klase selektivnih filtarskih funkcija, kao što su, na primer, propusnici visokih učestanosti i nepropusnici opsega, ne mogu se korektno preslikati impulsno invarijantnom transformacijom jer ne zadovoljavaju uslov ograničenosti frekvencijskog odziva (8.77). Impulsno invarijantna transformacija takođe nije pogodna ni za preslikavanje eliptičkih filtarskih funkcija jer uslov (8.77) ne može biti zadovoljen izborom dovoljno visoke učestanosti odabiranja.

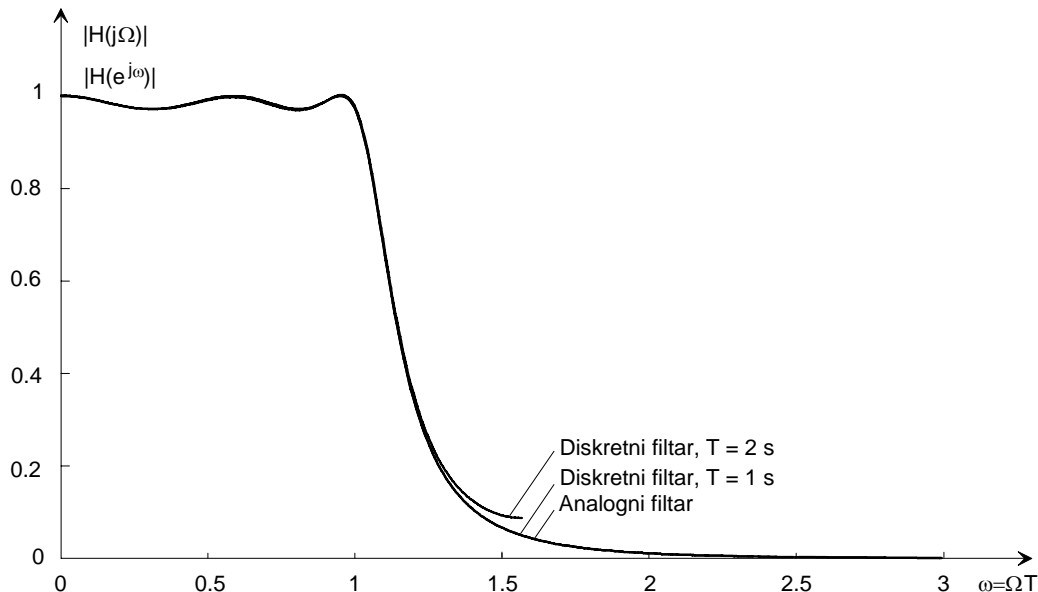
Kao ilustraciju primene impulsno invarijantne transformacije u sintezi IIR filtarskih funkcija posmatrajmo preslikavanje u digitalni filter normalizovanog analognog Čebiševljevog NF filtra petog reda čija je granična učestanost  $\omega_p = 1$ , a maksimalno slabljenje u propusnom opsegu 0.25 dB. Polovi analogne Čebiševljeve funkcije prenosa leže u tačkama:  $-0.13503 \pm j1.03788$ ,  $-0.35350 \pm j0.64145$  i  $-0.43695$  tako da razvoj u parcijalne razlomke ima oblik:

$$H(s) = \frac{0.52521}{s+0.43695} + \frac{0.09090 + j0.11842}{s+0.13503 - j1.03788} + \frac{0.09090 - j0.11842}{s+0.13503 + j1.03788} + \frac{-0.35350 - j0.19481}{s+0.35350 - j0.64145} + \frac{-0.35350 + j0.19481}{s+0.35350 + j0.64145}$$

Neka je perioda odabiranja  $T = 1$  s, tako da je veza između analogne i digitalne učestanosti  $\omega = \Omega$ . Uslov ograničenosti amplitudske karakteristike (8.77) je u ovom slučaju vrlo dobro zadovoljen jer je na Nikvistovoj učestanosti  $\omega_s/2 = \pi$  vrednost amplitudske karakteristike Čebiševljevog filtra jednaka  $9.6 \cdot 10^{-4}$  ( $\approx -60$  dB). Posle transformacije polova prema (8.84), dobijaju se polovi diskretne funkcije prenosa u tačkama:  $0.44388 \pm j0.75253$ ,  $0.56264 \pm j0.42018$  i  $0.64600$ , tako da se korišćenjem jednačine (8.83) konačno dobija:

$$H(z) = \frac{0.52521}{1-0.646z^{-1}} + \frac{0.09090 + j0.11842}{1-(0.44388 - j0.75253)z^{-1}} + \frac{0.09090 - j0.11842}{1-(0.44388 + j0.75253)z^{-1}} + \frac{-0.35350 - j0.19481}{1-(0.56264 - j0.42018)z^{-1}} + \frac{-0.35350 + j0.19481}{1-(0.56264 + j0.42018)z^{-1}} = \frac{0.01354z^{-1} + 0.18256z^{-2} + 0.24122z^{-3} + 0.03155z^{-4}}{1-4.99293z^{-1} + 11.32454z^{-2} - 14.62309z^{-3} + 10.935z^{-4} - 4.11238z^{-5}}$$

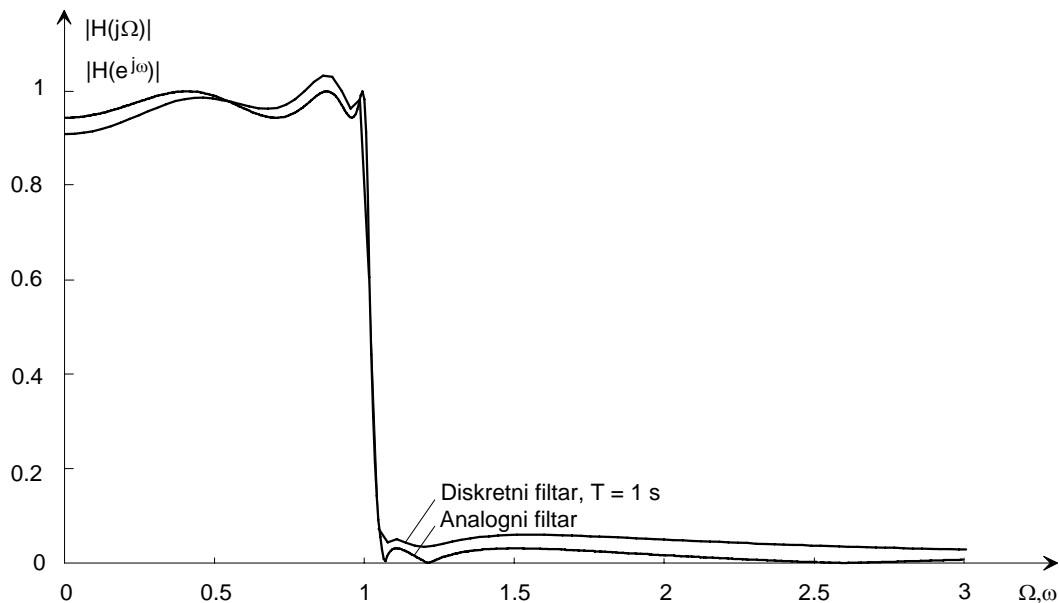
Na slici 8.11 su prikazane amplitudske karakteristike analognog i diskretnog filtra koje su praktično identične. Naravno, karakteristika diskretnog filtra je periodična sa periodom  $2\pi$ .



Slika 8.11 Preslikavanje Čebiševljevog filtra impulsno invarijantnom transformacijom.

Ako je perioda odabiranja dvostruko veća, vrednost amplitudske karakteristike na Nikvistovoj učestanosti se povećava na  $4.9 \cdot 10^{-2}$  ( $\approx -26$  dB) pa je uticaj preklapanja u spektralnom domenu veći. Zbog toga se amplitudska karakteristika izobličava, naročito u blizini Nikvistove učestanosti. I ova karakteristika je prikazana na slici 8.11.

U drugom primeru posmatraćemo preslikavanje normalizovanog analognog eliptičkog NF filtra petog reda sa maksimalnim slabljenjem u propusnom opsegu od 0.25 dB i minimalnim slabljenjem u nepropusnom opsegu od 30 dB u digitalni filter. Perioda odabiranja je ponovo izabrana da bude  $T = 1$  s, tako da je veza između analogne i digitalne učestanosti  $\omega = \Omega$ . Uslov ograničenosti amplitudske karakteristike (8.77) u ovom slučaju nije dobro zadovoljen jer je na Nikvistovoj učestanosti  $\omega_s/2 = \pi$  vrednost amplitudske karakteristike eliptičkog filtra manja ili jednaka  $3.16 \cdot 10^{-2}$  ( $\approx -30$  dB). Na slici 8.12 su prikazane amplitudske karakteristike analognog i diskretnog filtra. Sa slike se mogu uočiti znatne razlike u propusnom i nepropusnom opsegu koje su posledica preklapanja u frekvencijskom domenu.



Slika 8.12 Preslikavanje eliptičkog filtra impulsno invarijantnom transformacijom.

### 8.2.1 MODIFIKOVANA IMPULSNO INVARIJANTNA TRANSFORMACIJA

Kada je funkcija prenosa analognog sistema racionalna, obično je teško zadovoljiti uslov ograničenosti frekvencijskog odziva (8.77). Modifikacija impulsno invarijantne transformacije koja će biti opisana u narednom izlaganju upravo ima za cilj da proširi opseg primene impulsno invarijantne transformacije na filtarske funkcije sa konačnim nulama funkcije prenosa.

Neka je funkcija prenosa analognog sistema:

$$H_a(s) = H_0 \frac{N(s)}{D(s)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - s_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad (8.85)$$

gde je  $M \leq N$ ,  $s_i$  su nule sistema, dok su  $p_i$  polovi sistema. Funkcija  $H_a(s)$  može se napisati u obliku:

$$H_a(s) = H_0 \frac{H_{a1}(s)}{H_{a2}(s)} \quad (8.86)$$

odakle se, poređenjem sa (8.85), mogu identifikovati pomoćne funkcije prenosa  $H_{a1}(s)$  i  $H_{a2}(s)$ :

$$H_{a1}(s) = \frac{1}{D(s)} \quad (8.87)$$

$$H_{a2}(s) = \frac{1}{N(s)} \quad (8.88)$$

za koje se, pošto imaju samo imenilac, sigurno može izabrati učestanost diskretizacije tako da uslov ograničenosti frekvencijskog odziva (8.77) bude zadovoljen. Dakle, preslikavanjem funkcija  $H_{a1}(s)$  i  $H_{a2}(s)$ , odnosno nula i polova funkcije  $H_a(s)$ , pomoću impulsno invarijantne transformacije dobijaju se diskretne funkcije prenosa  $H_1(z)$  i  $H_2(z)$  kao:

$$H_1(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}} = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} \quad (8.89)$$

$$H_2(z) = \sum_{i=1}^M \frac{B_i z}{z - e^{s_i T}} = \frac{N_2(z)}{D_2(z)} \quad (8.90)$$

za koje važi:

$$H_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_{a1}(j\omega) = \frac{1}{T} H_{a1}\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (8.91)$$

$$H_2(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_{a2}(j\omega) = \frac{1}{T} H_{a2}\left(\frac{j\Omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (8.92)$$

Dakle, preslikavanjem se dobija funkcija prenosa:

$$H(z) = H_0 \frac{H_1(z)}{H_2(z)} = H_0 \frac{N_1(z)D_2(z)}{N_2(z)D_1(z)} = H_0 \frac{N_1(z)}{N_2(z)} \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})} \quad (8.93)$$

za koju prema (8.91) i (8.92) važi:

$$H(e^{j\Omega}) = H_0 \frac{H_1(e^{j\Omega})}{H_2(e^{j\Omega})} = H_a(j\omega) = H_a\left(\frac{j\Omega}{T}\right) \quad (8.94)$$

Međutim, opisana transformacija, mada rešava problem preslikavanja racionalnih funkcija, ima i dva važna nedostatka. Prvi se ogleda u činjenici da dobijena funkcija prenosa može biti nestabilna. Naime, polinom  $D_1(z)$  sigurno ima korenove unutar jediničnog kruga jer se oni dobijaju preslikavanjem polova analogne funkcije prenosa. S druge strane, položaj korenova polinoma  $N_2(z)$  se ne može kontrolisati, tako da se deo polova može naći izvan jediničnog kruga. U tom slučaju se može postupiti na sledeći način. Uticaj realnog pola  $z_i$  na amplitudsku karakteristiku prikazan je faktorom:

$$\left| (e^{j\Omega} - z_i) \right| = |z_i| \left| \left( e^{-j\Omega} - \frac{1}{z_i} \right) \right| = |z_i| \left| \left( e^{j\Omega} - \frac{1}{z_i} \right)^* \right| = |z_i| \left| \left( e^{j\Omega} - \frac{1}{z_i} \right) \right| \quad (8.95)$$

dok se, na sličan način, uticaj konjugovano kompleksnog para polova  $z_i$  i  $z_i^*$  može prikazati izrazom:

$$\left| (e^{j\Omega} - z_i)(e^{j\Omega} - z_i^*) \right| = |z_i|^2 \left| \left( e^{j\Omega} - \frac{1}{z_i} \right) \left( e^{j\Omega} - \frac{1}{z_i^*} \right) \right| \quad (8.96)$$

Kao što se vidi, u oba slučaja polovi funkcije  $H(z)$  izvan jediničnog kruga se mogu zameniti svojim recipročnim vrednostima bez uticaja na amplitudsku karakteristiku. Fazna karakteristika se, naravno, menja. Ako neki od polova leži na jediničnom krugu, korekcija se vrši malim smanjivanjem njegovog modula čime se malo utiče i na amplitudsku i na faznu karakteristiku.

Drugi nedostatak opisanog metoda leži u činjenici da je red diskretne funkcije prenosa  $H(z)$  povećan skoro dvostruko u odnosu na analognu funkciju prenosa  $H_a(s)$ .

### 8.2.2 USKLAĐENA Z-TRANSFORMACIJA

Drugi metod za proširenje oblasti primene impulsno invarijantne transformacije predstavlja *usklađena z-transformacija*. Iako je ovaj metod formulisan nezavisno od prethodno opisane modifikovane impulsno invarijantne transformacije [G-13], do izraza za preslikavanje pomoću usklađene z-transformacije najlakše se dolazi polazeći od izraza za funkciju prenosa dobijenu modifikovanim impulsno invarijantnom transformacijom (8.93). Ispitivanjem izraza (8.93) može se zaključiti da je uticaj faktora  $N_1(z)/N_2(z)$  relativno mali i da se može uspešno aproksimirati faktorom  $(z+1)^L$  gde je  $L = N - M$ . Tako se za diskretnu funkciju prenosa dobija:

$$H(z) = H_0(z+1)^L \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})} \quad (8.97)$$

Usklađena z-transformacija daje odlične rezultate kod preslikavanja VF i NO filtarskih funkcija. Nedostatak ovog metoda je što uvek postoji malo izobličenje amplitudske karakteristike, što može biti od značaja u propusnom opsegu Čebiševljevih ili eliptičkih filtara. Zbog toga se za preslikavanje NF i PO filtarskih funkcija radije koristi modifikovana impulsno invarijantna transformacija.

### 8.3 BILINEARNA TRANSFORMACIJA

Bilinearna transformacija predstavlja danas najčešće korišćeni metod preslikavanja analognih u diskretne funkcije prenosa. Osnovna pretpostavka na kojoj je zasnovana ova transformacija je da vremenski odzivi analognog i diskretnog integratora na proizvoljnu pobudu budu isti u diskretnim trenucima vremena.

U izvođenju bilinearne transformacije polazi se od funkcije prenosa idealnog analognog integratora:

$$H_I(s) = \frac{1}{s} \quad (8.98)$$

čiji je impulsni odziv:

$$h_I(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0^+ \\ 0 & t \leq 0^- \end{cases} \quad (8.99)$$

a odziv na proizvoljnu pobudu je dat konvolucionim integralom:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_I(t - \tau) d\tau \quad (8.100)$$

Neka je  $0^+ < \tau \leq t_1 < t_2$ . Tada važi:

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} x(\tau) h_I(t_2 - \tau) d\tau - \int_0^{t_1} x(\tau) h_I(t_1 - \tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) d\tau \quad (8.101)$$

jer je u posmatranom intervalu vremena  $h_I(t_1 - \tau) = h_I(t_2 - \tau) = 1$ . Ako je  $t_1 \approx t_2$  onda se vrednost integrala na desnoj strani jednačine (8.101) može aproksimirati izrazom:

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2} [x(t_1) + x(t_2)] \quad (8.102)$$

Neka je, konačno,  $t_1 = nT - T$ ,  $t_2 = nT$ . Onda izraz (8.102) postaje diferencna jednačina:

$$y(nT) - y(nT - T) = \frac{T}{2} [x(nT - T) + x(nT)] \quad (8.103)$$

Primenom  $z$ -transformacije na (8.103) dobija se:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2} [z^{-1}X(z) + X(z)] \quad (8.104)$$

odakle se lako dobija funkcija prenosa diskretnog integratora:

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (8.105)$$

Dakle, funkcija prenosa analognog integratora (8.98) se smenom:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (8.106)$$

preslikava u funkciju prenosa diskretnog integratora (8.105).

Preslikavanje (8.106) ima mnogo opštiji značaj. Naime, svaka analogna funkcija prenosa može se predstaviti pomoću dijagrama toka u kome eksplicitno figurišu grane sa integratorima čiji su prenosi jedine veličine koje zavise od učestanosti. Ako se u dijagramu toka izvrši transformacija analognih u diskretne integratore, dobija se dijagram toka odgovarajućeg diskretnog sistema čija je funkcija prenosa:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (8.107)$$

Odziv na proizvoljnu pobudu diskretnog sistema je približno jednak odzivu analognog sistema od koga je dobijen transformacijom.

Transformacija (8.106) je racionalna transformacija, jer se promenljiva  $s$  transformiše u količnik dve linearne funkcije promenljive  $z$ . Zbog toga se transformacija (8.106) naziva *bilinearna transformacija* ili Tustinova transformacija po autoru koji je prvi predložio [S-25]. S obzirom na veliki značaj i primenu bilinearne transformacije u sintezi IIR diskretnih sistema, u narednom izlaganju će biti detaljno analizirane osobine bilinearne transformacije.

Očigledno je da je bilinearne transformacije racionalna transformacija koja ne povećava red funkcije prenosa. Interesantno je utvrditi stabilnost bilinearne transformacije. Iz (8.106) se dobija:

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \quad (8.108)$$

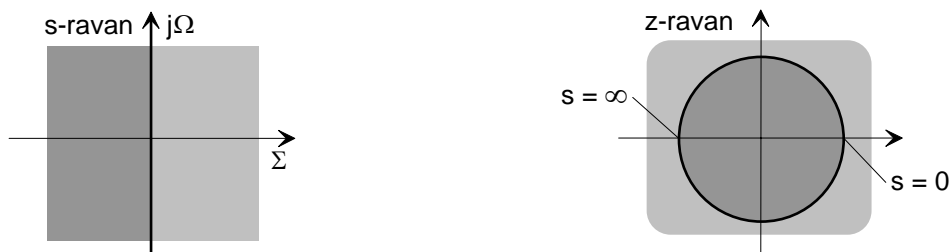
Kada se u dobijenu relaciju smeni  $s = \sigma + j\omega$ , za moduo kompleksne promenljive  $z$  se dobija:

$$|z| = \left[ \frac{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2} \quad (8.109)$$

Iz relacije (8.109) se lako uočavaju sledeće činjenice:

1. Imaginarna osa u  $s$ -ravni ( $\sigma = 0$ ) se preslikava u jedinični krug u  $z$ -ravni ( $|z| = 1$ ).
2. Leva polovina  $s$ -ravni ( $\sigma < 0$ ) se preslikava unutar jediničnog kruga u  $z$ -ravni ( $|z| < 1$ ).
3. Desna polovina  $s$ -ravni ( $\sigma > 0$ ) se preslikava izvan jediničnog kruga u  $z$ -ravni ( $|z| > 1$ ).
4. Koordinatni početak iz  $s$ -ravni ( $s = 0 + j0$ ) se preslikava u tačku  $z = 1 + j0$  u  $z$ -ravni.
5. Tačka u beskonačnosti iz  $s$ -ravni ( $s = \infty$ ) se preslikava u tačku  $z = -1 + j0$  u  $z$ -ravni.

Opisana svojstva bilinearne transformacije grafički su prikazana na slici 8.13.



Slika 8.13 Preslikavanje  $s$ -ravni u  $z$ -ravan bilinearnom transformacijom.

S obzirom da se osa učestanosti analogne  $s$ -ravni preslikava u jedinični krug u  $z$ -ravni na kome je definisana diskretna učestanost, interesantno je pronaći vezu između učestanosti u analognom sistemu i diskretnom sistemu koji je dobijen bilinearnom transformacijom. Smenom  $s = j\omega$  i  $z = e^{j\Omega}$  u (8.106) dobija se:

$$j\omega = \frac{2 e^{j\Omega} - 1}{T e^{j\Omega} + 1} = \frac{2 e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{T e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}} \quad (8.110)$$

odnosno,

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \quad (8.111)$$

Kao što se vidi, transformacija analogne učestanosti u digitalnu je nelinearna. Ova pojava nije neočekivana jer se, na primer, ceo pozitivni deo imaginarne ose preslikava u gornju polovinu

jediničnog kruga. Samo u opsegu učestanosti  $0 \leq \Omega \leq 0.3$  transformacija učestanosti je približno linearna,  $\omega \approx \Omega/T$ . Kako je prema (8.107):

$$H(e^{j\Omega}) = H_a(j\omega) \Big|_{\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}} \quad (8.112)$$

za određeni par učestanosti ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) amplitudska i fazna karakteristika su iste. Međutim, zbog nelinearne transformacije učestanosti, *amplitudska i fazna karakteristika su izobličene*. Izobličenja amplitudske karakteristike nisu bitna ako su gabariti za amplitudsku karakteristiku zadati kao niz segmenata konstantne vrednosti amplitude. Naime, posle bilinearne transformacije, vrednosti amplitude ostaju iste samo se menja položaj maksimuma i minimuma amplitudske karakteristike. Izobličenja fazne karakteristike takođe nisu važna ako se radi o preslikavanju funkcije prenosa koja je dobijena nekom od aproksimacija amplitudske karakteristike gde se ni u analognom domenu ne vodi računa o fazi. Najvažniji slučajevi kada su nelinearna izobličenja učestanosti koja unosi bilinearne transformacije bitna su preslikavanja analognih diferencijatora i analognih filtera sa linearnom faznom karakteristikom u diskretni domen. U tim slučajevima se bilinearne transformacije ne koristi za preslikavanje analognih funkcija prenosa, jer se bolji rezultati dobijaju nekom od varijanti impulsno invarijantne transformacije.

Kod preslikavanja selektivnih filterarskih funkcija, gde fazna karakteristika nije od interesa, efekat distorzije skale učestanosti se može eliminisati *predistorzijom* karakteristike analognog filtra. Ako su karakteristične učestanosti u specifikacijama diskretnog sistema  $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \dots$  odgovarajuće karakteristične učestanosti u specifikacijama analognog sistema date su sa:

$$\bar{\omega}_i = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.113)$$

Dakle, ako se analogni filter projektuje tako da zadovolji specifikacije sa karakterističnim učestanostima  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$ , posle preslikavanja bilinearnom transformacijom diskretni sistem će zadovoljavati specifikacije sa traženim karakterističnim učestanostima  $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \dots$ .

Bilinearna transformacija sa predistorzijom učestanosti se vrlo često primenjuje u sintezi IIR filterarskih funkcija. U slučajevima sinteze filterarskih funkcija kada su gabariti amplitudske karakteristike zadati segmentima konstantne vrednosti ili kada fazna karakteristika nije od interesa, a to čini oko 90% praktičnih slučajeva sinteze, koristi se bilinearne transformacije. Međutim, u praksi se bilinearne transformacije funkcije prenosa retko vrši primenom izraza (8.107) već se znatno češće koristi preslikavanje nula i polova funkcije prenosa pomoću jednačine (8.108). Ako se nule i polovi analogne funkcije prenosa  $u_i$  i  $s_i$  bilinearnom transformacijom (8.108) preslikavaju u nule i polove diskretne funkcije prenosa  $z_i$  i  $p_i$  onda se iz (8.107) dobija:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = H_{0a} \frac{\prod_{i=1}^M (s - u_i)}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = H_{0d} (z+1)^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \quad (8.114)$$

S obzirom na značaj ovog metoda preslikavanja, u odeljku 8.5 detaljnije će biti opisana primena postupka predistorzije u sintezi funkcija prenosa NF, VF, PO i NO tipa na osnovu zadatih specifikacija.



## 8.4 TRANSFORMACIJE UČESTANOSTI U DISKRETNOM DOMENU

Preslikavanje funkcije prenosa NF tipa u druge tipove funkcije može se obaviti i u diskretnom domenu. U daljem tekstu biće opisane neke takve korisne transformacije koje su zasnovane na primeni opšte transformacije:

$$z = f(\hat{z}) = e^{jn\pi} \prod_{i=1}^m \frac{\hat{z} - a_i^*}{1 - a_i \hat{z}} \quad (8.115)$$

gde su  $n$  i  $m$  celi brojevi, dok su  $a_i$  i  $a_i^*$  konjugovano kompleksne konstante. Preslikavanje (8.115) preslikava jedinični krug iz  $z$  ravni u jedinični krug u  $\hat{z}$  ravni, unutrašnjost jediničnog kruga iz  $z$  ravni u unutrašnjost jediničnog kruga u  $\hat{z}$  ravni, dok se spoljašnjost jediničnog kruga iz  $z$  ravni preslikava u spoljašnjost jediničnog kruga u  $\hat{z}$  ravni. Zbog toga je stabilnost funkcija prenosa očuvana prilikom preslikavanja.

### 8.4.1 Transformacija NF→NF

Transformacija NF funkcije prenosa u NF funkciju prenosa izvodi se radi promene graničnih učestanosti. Neka je granična učestanost propusnog opsega funkcije koja se transformiše  $\omega_p$ , a granična učestanost propusnog opsega posle transformacije  $\hat{\omega}_p$ . Preslikavanje je prikazano na slici 8.14. Pošto se menja samo granična učestanost, u opštoj formuli (8.115) uzima se za vrednost parametra  $m$ ,  $m = 1$ , tj. transformacija je bilinearna i svodi se na:

$$z = e^{jn\pi} \frac{\hat{z} - a^*}{1 - a\hat{z}} \quad (8.116)$$



Slika 8.14 Transformacija NF→NF.

Nepoznati parametri  $n$  i  $a$  mogu se odrediti na sledeći način. U tačkama A i A' ima se  $z = \hat{z} = 1$ , dok je u tačkama C i C'  $z = \hat{z} = -1$ . Rešavanjem sistema od dve jednačine dobijaju se rešenja za  $n$  i  $a$ :

$$n = 0, \quad a = a^* = \alpha \quad (8.117)$$

tako da je konačno:

$$z = \frac{\hat{z} - \alpha}{1 - \alpha\hat{z}} \quad (8.118)$$

Vrednost parametra  $\alpha$  određuje se postavljanjem jednačine za tačke B i B' gde je  $z = e^{j\Omega_p}$  i  $\hat{z} = e^{j\hat{\Omega}_p}$ , čijim se rešavanjem dobija:

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\Omega_p - \hat{\Omega}_p}{2}}{\sin \frac{\Omega_p + \hat{\Omega}_p}{2}} \quad (8.119)$$

#### 8.4.2 Transformacija NF→VF

I u ovom slučaju propusni opseg se preslikava u jedan propusni opseg, tako da je  $m = 1$ . Rešavanjem jednačina postavljenih za tačke A i A', C i C', na slici 8.15, dobija se:

$$n = 1, \quad a = a^* = \alpha \quad (8.120)$$

tako da je:

$$z = -\frac{\hat{z} - \alpha}{1 - \alpha \hat{z}} \quad (8.121)$$

dok se vrednost parametra  $\alpha$  određuje postavljanjem jednačine za tačke B i B', čijim se rešavanjem dobija:

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\Omega_p - \hat{\Omega}_p}{2}}{\cos \frac{\Omega_p + \hat{\Omega}_p}{2}} \quad (8.122)$$



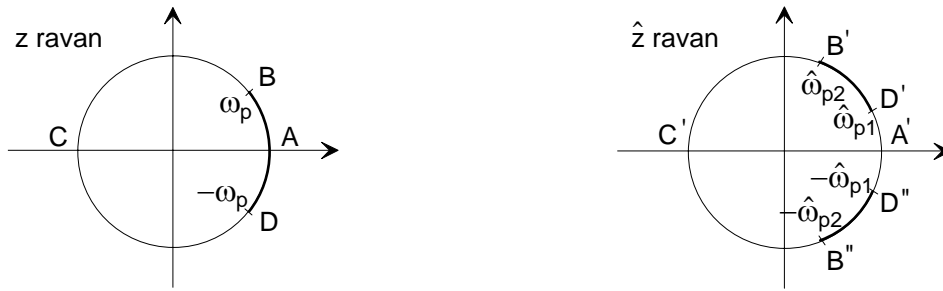
Slika 8.15 Transformacija NF→VF.

#### 8.4.3 Transformacija NF→PO

U slučaju transformacije NF filtra u propusnik opsega učestanosti, propusni opseg se preslikava u dva propusna opsega, kao na slici 8.16. Zbog toga je vrednost parametra  $m = 2$ , pa je transformacija bikvadratna i ima oblik:

$$z = e^{jn\pi} \frac{\hat{z}^2 + \beta \hat{z} + \gamma}{1 + \beta \hat{z} + \gamma \hat{z}^2} \quad (8.123)$$

gde su  $\beta$  i  $\gamma$  realne konstante.



Slika 8.16 Transformacija NF→PO.

Postavljanjem jednačine za tačke C i C', dobija se rešenje  $n = 1$  ( $e^{jn\pi} = -1$ ). Postavljanjem i rešavanjem jednačina za tačke B i B' i D i D', dobijaju se vrednosti za parametre  $\beta$  i  $\gamma$  kao:

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+k} \quad (8.124)$$

$$\gamma = \frac{k-1}{k+1} \quad (8.125)$$

gde je:

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} + \hat{\Omega}_{p1}}{2}}{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2}} \quad (8.126)$$

$$k = \tan \frac{\Omega_p}{2} \cot \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2} \quad (8.127)$$

#### 8.4.4 Transformacija NF→NO

I u slučaju transformacije NF filtra u nepropusnik opsega učestanosti propusni opseg se preslikava u dva propusna opsega kao na slici 8.17. Zato je  $m = 2$ , transformacija je bikvadratna i data je jednačinom (8.123), kao u prethodnom slučaju.



Slika 8.17 Transformacija NF→NO.

Postavljanjem jednačine za tačke C i C', dobija se rešenje  $n = 0$  ( $e^{jn\pi} = 1$ ). Postavljanjem i rešavanjem jednačina za tačke B i B' i D i D', dobijaju se vrednosti za parametre  $\beta$  i  $\gamma$  kao:

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1+k} \quad (8.128)$$

$$\gamma = \frac{1-k}{1+k} \quad (8.129)$$

gde je:

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} + \hat{\Omega}_{p1}}{2}}{\cos \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2}} \quad (8.130)$$

$$k = \tan \frac{\Omega_p}{2} \tan \frac{\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1}}{2} \quad (8.131)$$

Kao što se vidi, transformacija učestanosti može biti izvršena u analognom domenu, kao u odeljku 8.1.7, ili pak pomoću opisanih transformacija u diskretnom domenu. Ako se za preslikavanje koristi bilinearna transformacija, rezultat koji se dobija je isti, nezavisno od izabranog metoda za prelaz sa NF funkcije na željeni tip funkcije prenosa. Međutim, ako se za preslikavanje koristi impulsno invarijantna transformacija, rezultat neće biti isti, čak može biti i nekorektan. Na primer, ako treba projektovati VF filter, transformacija NF→VF se ne sme izvršiti u analognom domenu, jer posle toga nisu zadovoljeni uslovi za primenu impulsno invarijantne transformacije. U takvom slučaju, bolje je primeniti impulsno invarijantnu transformaciju za preslikavanje analognog NF filtra u diskretni NF filter, a zatim primeniti NF→VF diskretnu transformaciju za dobijanje tražene funkcije prenosa.

## 8.5 PROJEKTOVANJE NA OSNOVU ZADATIH SPECIFIKACIJA

Kao što je već rečeno, bilinearna transformacija predstavlja osnovni alat za projektovanje diskretnih sistema sa beskonačnim impulsnim odzivom. Proces projektovanja diskretnog sistema pomoću bilinearne transformacije može se podeliti u šest faza:

1. Zadavanje specifikacija u diskretnom domenu i predistorzija karakterističnih učestanosti  $\bar{\Omega}_p$  i  $\bar{\Omega}_a$  u učestanosti  $\bar{\omega}_p$  i  $\bar{\omega}_a$ ,
2. Određivanje reda  $N$  i sinteza analognog filtra na osnovu specifikacija  $\alpha_p$ ,  $\alpha_a$ ,  $\bar{\omega}_p$  i  $\bar{\omega}_a$ ,
3. Transformacija nula i polova analognog filtra u nule i polove diskretnog filtra pomoću relacije (8.108),
4. Izračunavanje multiplikativne konstante  $H_{0d}$  iz  $H(1) = H_a(0)$  ili sličnog uslova,
5. Formiranje  $H(z)$  na osnovu (8.114)
6. Preslikavanje  $H(z)$  u drugi tip funkcije prenosa, ukoliko nije izvršeno u fazi 2.

S obzirom na izvesne razlike i probleme koji mogu nastati u postupku predistorzije različitih tipova filtera, u daljem tekstu će biti detaljnije razmotren postupak predistorzije za četiri osnovna tipa filtera.

### 8.5.1 Predistorzija karakterističnih učestanosti NF filtra

Grafične učestanosti diskretne NF funkcije prenosa  $\bar{\Omega}_p$  i  $\bar{\Omega}_a$  preslikavaju se, prema (8.113), u grafične učestanosti analogne funkcije prenosa  $\bar{\omega}_p$  i  $\bar{\omega}_a$ :

$$\bar{\omega}_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2} \quad (8.132)$$

$$\bar{\omega}_a = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2} \quad (8.133)$$

Lako je utvrditi da važi nejednakost:

$$\frac{\bar{\omega}_a}{\bar{\omega}_p} = \frac{\tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}}{\tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}} > \frac{\bar{\Omega}_a}{\bar{\Omega}_p} \quad (8.134)$$

odnosno, da je strmina amplitudske karakteristike analognog filtra manja od strmine amplitudske karakteristike diskretnog filtra dobijenog bilinearnom transformacijom. Ova činjenica može za posledicu da ima manji potreban red funkcije prenosa.

Pošto se NF filtri obično projektuju, ili su im vrednosti tabelisane, za grafičnu učestanost propusnog opsega  $\tilde{\omega}_p = 1$ , mora se izvršiti dodatno skaliranje učestanosti u analognom domenu, tj. preslikavanje NF→NF prema (8.54), odnosno:

$$\tilde{\omega} = a\bar{\omega} \quad (8.135)$$

Dakle, iz (8.132) i (8.133) se korišćenjem (8.135) dobija:

$$\tilde{\omega}_p = \frac{2}{T} a \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2} \quad (8.136)$$

$$\tilde{\omega}_a = \frac{2}{T} a \tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2} \quad (8.137)$$

Vrednost parametra  $a$ , koja je potrebna u postupku denormalizacije nula i polova, dobija se iz (8.136) kao:

$$a = \frac{T\tilde{\omega}_p}{2 \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}} \quad (8.138)$$

gde parametar  $\tilde{\omega}_p$  (grafična učestanost propusnog opsega prototipskog NF filtra) zavisi od metoda aproksimacije (najčešće je  $\tilde{\omega}_p = 1$ ).

Za određivanje reda filtra potrebno je odrediti parametar  $k$ , koji je u ovom slučaju:

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{\tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}}{\tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}} \quad (8.139)$$

### 8.5.2 Predistorzija karakterističnih učestanosti VF filtra

I u slučaju VF filtra, granične učestanosti diskretne VF funkcije prenosa  $\bar{\Omega}_p$  i  $\bar{\Omega}_a$  preslikavaju se u granične učestanosti analogne funkcije prenosa  $\bar{\omega}_p$  i  $\bar{\omega}_a$  korišćenjem izraza (8.132) i (8.133). Međutim, pri određivanju graničnih učestanosti prototipskog NF filtra, umesto (8.54) koristi se preslikavanje (8.59) tako da se dobija:

$$\tilde{\omega} = \frac{a}{\bar{\omega}} \quad (8.140)$$

Zbog toga je:

$$\tilde{\omega}_p = \frac{a}{\frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}} \quad (8.141)$$

odnosno,

$$a = \frac{2\tilde{\omega}_p \tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}}{T} \quad (8.142)$$

dok je,

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{\bar{\omega}_a}{\bar{\omega}_p} = \frac{\tan \frac{\bar{\Omega}_a}{2}}{\tan \frac{\bar{\Omega}_p}{2}} \quad (8.143)$$

### 8.5.3 Predistorzija karakterističnih učestanosti PO filtra

Predistorzija karakterističnih učestanosti filtra propusnika opsega učestanosti i određivanje karakterističnih učestanosti prototipskog NF filtra nešto su komplikovaniji nego u prethodna dva slučaja. Granične učestanosti diskretne PO funkcije prenosa  $\bar{\Omega}_{p1}$ ,  $\bar{\Omega}_{p2}$ ,  $\bar{\Omega}_{a1}$  i  $\bar{\Omega}_{a2}$  preslikavaju se u granične učestanosti analogne funkcije prenosa  $\bar{\omega}_{p1}$ ,  $\bar{\omega}_{p2}$ ,  $\bar{\omega}_{a1}$  i  $\bar{\omega}_{a2}$  korišćenjem izraza:

$$\bar{\omega}_{pi} = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_{pi}}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (8.144)$$

$$\bar{\omega}_{ai} = \frac{2}{T} \tan \frac{\bar{\Omega}_{ai}}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (8.145)$$

Na osnovu preslikanih graničnih učestanosti izračunavaju se konstante  $K_A$ ,  $K_B$  i  $K_C$ , koje će biti korišćene u postupku određivanja parametara prototipskog NF filtra, na sledeći način:

$$K_A = \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} - \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \quad (8.146)$$

$$K_B = \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} \quad (8.147)$$

$$K_C = \tan \frac{\bar{\Omega}_{a1}}{2} \tan \frac{\bar{\Omega}_{a2}}{2} \quad (8.148)$$

Preslikavanje učestanosti analognog PO filtra u učestanost prototipskog NF filtra se, međutim, izvodi prema relaciji (8.64) koja je kvadratnog karaktera:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{B} \left( \bar{\omega} - \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}} \right) \quad (8.149)$$

odnosno, veza između graničnih učestanosti prototipskog NF filtra i analognog PO filtra je, prema (8.66) i (8.67):

$$\bar{\omega}_{p1}, \bar{\omega}_{p2} = \frac{1}{2} \left( \pm \tilde{\omega}_p B + \sqrt{\tilde{\omega}_p^2 B^2 + 4\bar{\omega}_0^2} \right) \quad (8.150)$$

$$\bar{\omega}_{a1}, \bar{\omega}_{a2} = \frac{1}{2} \left( \pm \tilde{\omega}_a B + \sqrt{\tilde{\omega}_a^2 B^2 + 4\bar{\omega}_0^2} \right) \quad (8.151)$$

gde je:

$$B\tilde{\omega}_p = \bar{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1} \quad (8.152)$$

$$B\tilde{\omega}_a = \bar{\omega}_{a2} - \bar{\omega}_{a1} \quad (8.153)$$

$$\bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}_{p1}\bar{\omega}_{p2} = \bar{\omega}_{a1}\bar{\omega}_{a2} \quad (8.154)$$

Uslov (8.154) koji potiče od kvadratnog karaktera preslikavanja (8.149) naziva se *uslov geometrijske simetrije*. S obzirom da su učestanosti  $\bar{\Omega}_{p1}$ ,  $\bar{\Omega}_{p2}$ ,  $\bar{\Omega}_{a1}$  i  $\bar{\Omega}_{a2}$ , odnosno učestanosti  $\bar{\omega}_{p1}$ ,  $\bar{\omega}_{p2}$ ,  $\bar{\omega}_{a1}$  i  $\bar{\omega}_{a2}$  unapred zadate, uslov (8.154) je retko zadovoljen. Uobičajeno je da se vrednosti za  $\bar{\omega}_{p1}$  i  $\bar{\omega}_{p2}$  odrede prema (8.144), da se jedna od učestanosti  $\bar{\omega}_{a1}$  ili  $\bar{\omega}_{a2}$  odredi prema (8.145), dok se druga granična učestanost nepropusnog opsega izabere tako da uslov geometrijske simetrije (8.154) bude zadovoljen.

Iz (8.152) i (8.144) i (8.146) sledi:

$$B = \frac{\bar{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1}}{\tilde{\omega}_p} = \frac{2 \left( \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} - \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \right)}{T\tilde{\omega}_p} = \frac{2K_A}{T\tilde{\omega}_p} \quad (8.155)$$

Takođe, iz (8.154), (8.144), (8.145) i (8.147) sledi:

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\bar{\omega}_{p1}\bar{\omega}_{p2}} = \frac{2 \sqrt{\tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2}}}{T} = \frac{2\sqrt{K_B}}{T} \quad (8.156)$$

Ako je  $\bar{\omega}_{p1}\bar{\omega}_{p2} < \bar{\omega}_{a1}\bar{\omega}_{a2}$  ( $K_B < K_C$ ), granična učestanost gornjeg nepropusnog opsega se bira tako da bude  $\bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}_{a1}\bar{\omega}'_{a2}$ , gde je  $\bar{\omega}'_{a2} \leq \bar{\omega}_{a2}$ . Time se specifikacije čine strožijim jer se strmina amplitudske karakteristike u gornjoj prelaznoj zoni povećava. Onda iz (8.153) sledi:

$$\tilde{\omega}_a = \frac{1}{B} (\bar{\omega}'_{a2} - \bar{\omega}_{a1}) = \frac{1}{B} \left( \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}_{a1}} - \bar{\omega}_{a1} \right) = \frac{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\omega}_{a1}^2}{B\bar{\omega}_{a1}} = \frac{\left( \frac{2}{T} \right)^2 K_B - \left( \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a1}}{2} \right)^2}{\frac{2K_A}{T\tilde{\omega}_p} \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a1}}{2}} \quad (8.157)$$

odakle je:

$$k_1 = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{K_A \tan \frac{\Omega_{a1}}{2}}{K_B - \tan^2 \frac{\Omega_{a1}}{2}} \quad (8.158)$$

Ako je  $\bar{\omega}_{p1}\bar{\omega}_{p2} > \bar{\omega}_{a1}\bar{\omega}_{a2}$  ( $K_B > K_C$ ), granična učestanost donjeg nepropusnog opsega se bira tako da bude  $\bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}'_{a1}\bar{\omega}_{a2}$  gde je  $\bar{\omega}'_{a1} \geq \bar{\omega}_{a1}$ . Time se specifikacije takođe čine strožijim, jer se strmina amplitudske karakteristike u donjoj prelaznoj zoni povećava. Iz (8.153) sledi:

$$\tilde{\omega}_a = \frac{1}{B}(\bar{\omega}_{a2} - \bar{\omega}'_{a1}) = \frac{1}{B} \left( \bar{\omega}_{a2} - \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}_{a2}} \right) = \frac{\bar{\omega}_{a2}^2 - \bar{\omega}_0^2}{B\bar{\omega}_{a2}} = \frac{\left( \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a2}}{2} \right)^2 - \left( \frac{2}{T} \right)^2 K_B}{\frac{2K_A}{T\tilde{\omega}_p} \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_{a2}}{2}} \quad (8.159)$$

odakle je:

$$k_2 = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \frac{K_A \tan \frac{\Omega_{a2}}{2}}{\tan^2 \frac{\Omega_{a2}}{2} - K_B} \quad (8.160)$$

Dakle, parametar  $k$  koji definiše strminu amplitudske karakteristike u prelaznoj zoni, odnosno red filtarske funkcije, određen je izrazom:

$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \begin{cases} k_1, & K_B \leq K_C \\ k_2, & K_B \geq K_C \end{cases} \quad (8.161)$$

gde su  $k_1$  i  $k_2$  određeni izrazima (8.158) i (8.160).

#### 8.5.4 Predistorzija karakterističnih učestanosti NO filtra

Predistorzija karakterističnih učestanosti filtra nepropusnika opsega učestanosti i određivanje karakterističnih učestanosti prototipskog NF filtra vrlo su slični odgovarajućem postupku za PO filtarsku funkciju. Granične učestanosti diskretne PO funkcije prenosa  $\bar{\Omega}_{p1}$ ,  $\bar{\Omega}_{p2}$ ,  $\bar{\Omega}_{a1}$  i  $\bar{\Omega}_{a2}$  preslikavaju se u granične učestanosti analogne funkcije prenosa  $\bar{\omega}_{p1}$ ,  $\bar{\omega}_{p2}$ ,  $\bar{\omega}_{a1}$  i  $\bar{\omega}_{a2}$  korišćenjem izraza (8.144) i (8.145). Konstante  $K_A$ ,  $K_B$  i  $K_C$  određene su izrazima (8.146), (8.147) i (8.148). Preslikavanje učestanosti analognog NO filtra u učestanost prototipskog NF filtra izvodi se izrazom:

$$\tilde{\omega} = \frac{B\bar{\omega}}{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\omega}^2} \quad (8.162)$$

Iz (8.162) i (8.144) i (8.146) sledi:

$$B = \tilde{\omega}_p (\bar{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1}) = \frac{2\tilde{\omega}_p \left( \tan \frac{\bar{\Omega}_{p2}}{2} - \tan \frac{\bar{\Omega}_{p1}}{2} \right)}{T} = \frac{2K_A \tilde{\omega}_p}{T} \quad (8.163)$$

dok je izraz za centralnu učestanost  $\bar{\omega}_0$ , isti kao u slučaju propusnika opsega (8.156). Parametar  $k$  određen je izrazom:



$$k = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_a} = \begin{cases} 1/k_2, & K_B \leq K_C \\ 1/k_1, & K_B \geq K_C \end{cases} \quad (8.164)$$

gde su  $k_1$  i  $k_2$  određeni izrazima (8.158) i (8.160).

Izvedeni izrazi za parametar  $k$  su opšte prirode i ne zavise od toga koja se aproksimacija amplitudske karakteristike koristi prilikom sinteze prototipske NF funkcije.

### 8.5.5 Primeri projektovanja filtara na osnovu zadatih specifikacija

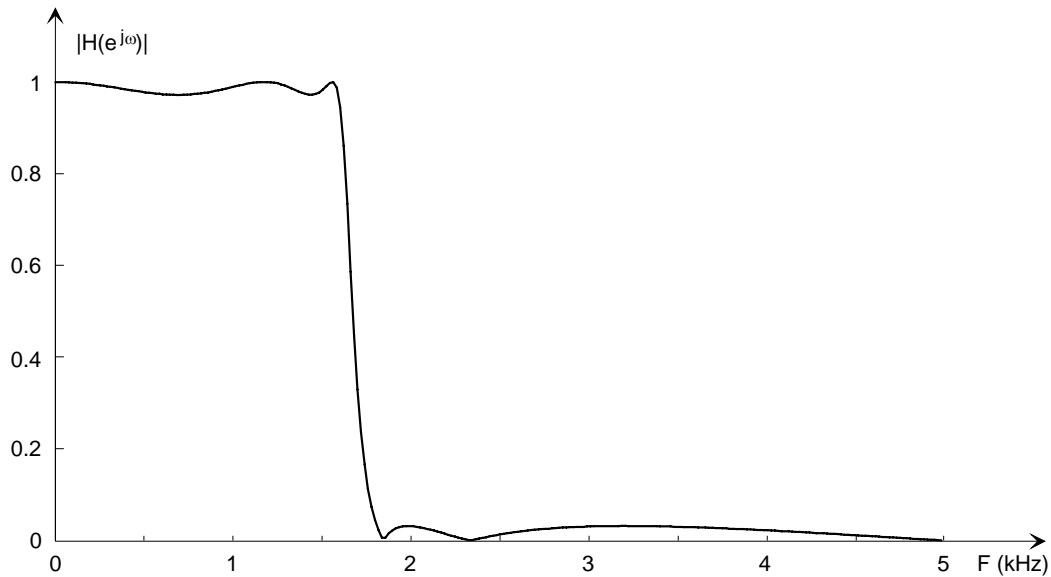
U ovom odeljku će primena bilinearne transformacije u sintezi diskretnih funkcija prenosa biti ilustrovana sa nekoliko primera.

Posmatrajmo prvo sintezu eliptičkog NF filtra, koji treba da zadovolji sledeće specifikacije: učestanost odabiranja  $f_s = 10$  kHz,  $f_p = 1.59155$  kHz,  $\alpha_p = 0.25$  dB,  $f_a = 1.72$  kHz,  $\alpha_a = 30$  dB. Za granične učestanosti u diskretnom domenu lako se dobija:  $\bar{\Omega}_p = 2\pi f_p / f_s = 1$  i  $\bar{\Omega}_a = 2\pi f_a / f_s = 1.0807$ . Postupkom predistorzije (8.132) i (8.133) dobijaju se granične učestanosti analognog filtra,  $\bar{\omega}_p = 10926$  rad/s i  $\bar{\omega}_a = 11998$  rad/s, na osnovu kojih se određuje minimalni red filtra,  $N = 5$ . Primenjujući postupak sinteze analogne NF funkcije prenosa i transformacije učestanosti u analognom domenu, koji su opisani u odeljku 8.1, kao i preslikavanje nula i polova bilinearnom transformacijom, dobijaju se položaji nula i polova funkcije prenosa u  $z$ -ravni koji su prikazani u Tabeli 8.1. Amplitudska karakteristika filtra prikazana je na slici 8.18.

Tražene granične učestanosti diskretne funkcije prenosa,  $\bar{\Omega}_p$  i  $\bar{\Omega}_a$ , su iste kao u slučaju preslikavanja eliptičkog filtra impulsno invarijantnom transformacijom, koje je prikazano na slici 8.12. Lako se može uočiti da se pri preslikavanju eliptičkog filtra bilinearnom transformacijom u potpunosti zadržava oblik amplitudske karakteristike i u propusnom i u nepropusnom opsegu, jer nema preklapanja u frekvencijskom domenu.

**Tabela 8.1 Nule i polovi digitalnog eliptičkog NF filtra.**

Nule	Polovi
-1.000000	0.484108
$0.400513 \pm j0.916291$	$0.495389 \pm j0.811452$
$0.104163 \pm j0.994560$	$0.485407 \pm j0.577101$



Slika 8.18 Amplitudska karakteristika digitalnog eliptičkog NF filtra.

Kao sledeći primer, posmatrajmo sintezu VF filtra koji treba da zadovolji sledeće specifikacije: učestanost odabiranja  $f_s = 10$  kHz,  $f_p = 3.5$  kHz,  $\alpha_p = 1$  dB,  $f_a = 1.5$  kHz,  $\alpha_a = 45$  dB. Za granične učestanosti u diskretnom domenu, lako se dobija:  $\bar{\Omega}_p = 2.19911$  i  $\bar{\Omega}_a = 0.94248$ . Postupkom predistorzije dobijaju se granične učestanosti analogne filtarske funkcije,  $\bar{\omega}_p = 39252$  rad/s i  $\bar{\omega}_a = 10191$  rad/s. Potreban red funkcije prenosa iznosi  $N = 5$  za Batervortov tip aproksimacije,  $N = 5$  za Čebiševljevu aproksimaciju prve vrste,  $N = 5$  za Čebiševljevu aproksimaciju druge vrste i  $N = 3$  za eliptičku aproksimaciju. Posle sinteze analogne NF funkcije prenosa, preslikavanja NF $\rightarrow$ VF u analognom domenu i preslikavanja nula i polova bilinearnom transformacijom, dobijaju se položaji nula i polova funkcije prenosa prikazani u Tabeli 8.2.

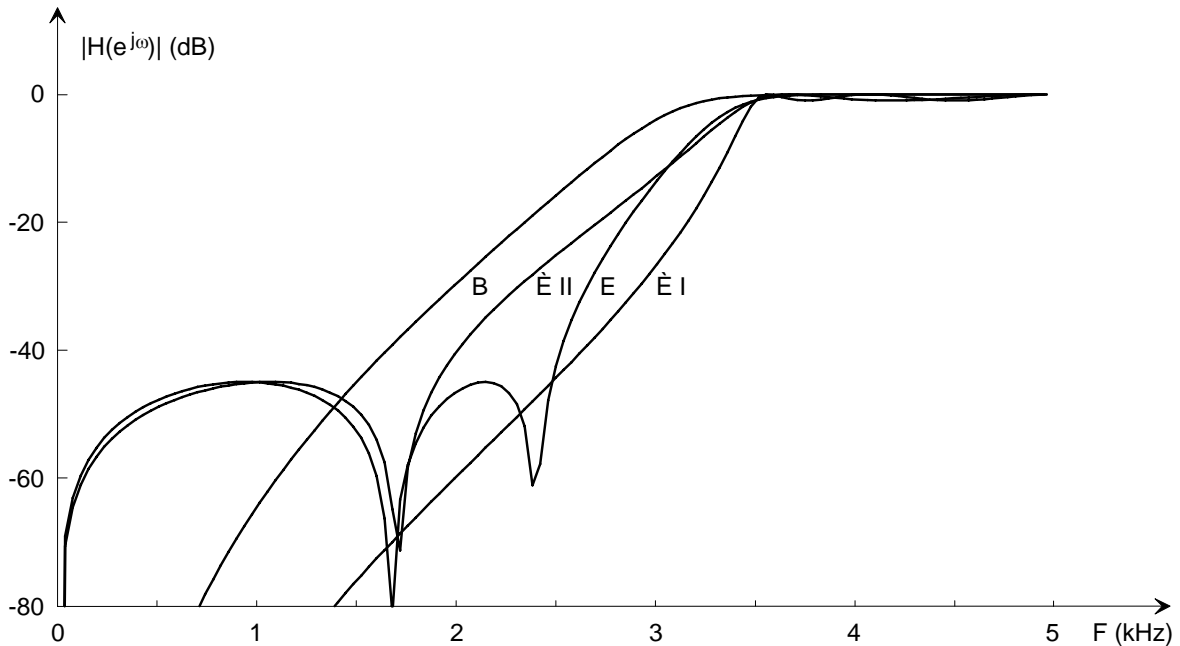
Tabela 8.2 Nule i polovi VF filtara.

	Batervort, $N = 5$	Čebišev I, $N = 5$	Čebišev II, $N = 5$	Eliptički, $N = 3$
Nule	1.002778	0.993820	1.000000	1.000000
	$1.000853 \pm j0.002640$	$1.005016 \pm j0.003656$	$0.062874 \pm j0.998022$	$0.478121 \pm j0.878294$
	$0.997758 \pm j0.001626$	$0.998073 \pm j0.005883$	$0.496137 \pm j0.868244$	
Polovi	-0.179223	-0.742913	-0.182240	-5.848646
	$-0.269263 \pm j0.691481$	$-0.551601 \pm j0.003656$	$-0.405273 \pm j0.684440$	$-0.493927 \pm j0.662143$
	$-0.197474 \pm j0.313420$	$-0.658125 \pm j0.005883$	$-0.247455 \pm j0.356923$	

Amplitudske karakteristike sva četiri filtra prikazane su na slici 8.19. Lako se može uočiti da sve filtarske funkcije, osim Batervortove, zadovoljavaju i mnogo strožije specifikacije. Ova osobina je posledica činjenice da se pri određivanju reda funkcije uvek vrši zaokruživanje na veći ceo broj. Tako se desilo da u principu mnogo selektivnija Čebiševljeva karakteristika ima isti red kao i Batervortova, što za posledicu ima mnogo bolju amplitudsku karakteristiku.

Kao treći primer, posmatrajmo sintezu eliptičkog filtra propusnika opsega, koji treba da zadovolji sledeće specifikacije: učestanost odabiranja  $f_s = 6$  kHz,  $f_{p1} = 0.9$  kHz,  $f_{p2} = 1.1$  kHz,  $\alpha_p = 1$  dB,  $f_{a1} = 0.8$  kHz,  $f_{a2} = 1.2$  kHz,  $\alpha_a = 45$  dB. Funkcija prenosa treba da bude eliptičkog tipa. Za tražene granične učestanosti u diskretnom domenu, lako se dobija:  $\bar{\Omega}_{p1} = 0.94248$ ,  $\bar{\Omega}_{p2} = 1.15192$ ,  $\bar{\Omega}_{a1} = 0.83776$  i  $\bar{\Omega}_{a2} = 1.25664$ . Postupkom predistorzije dobijaju se granične

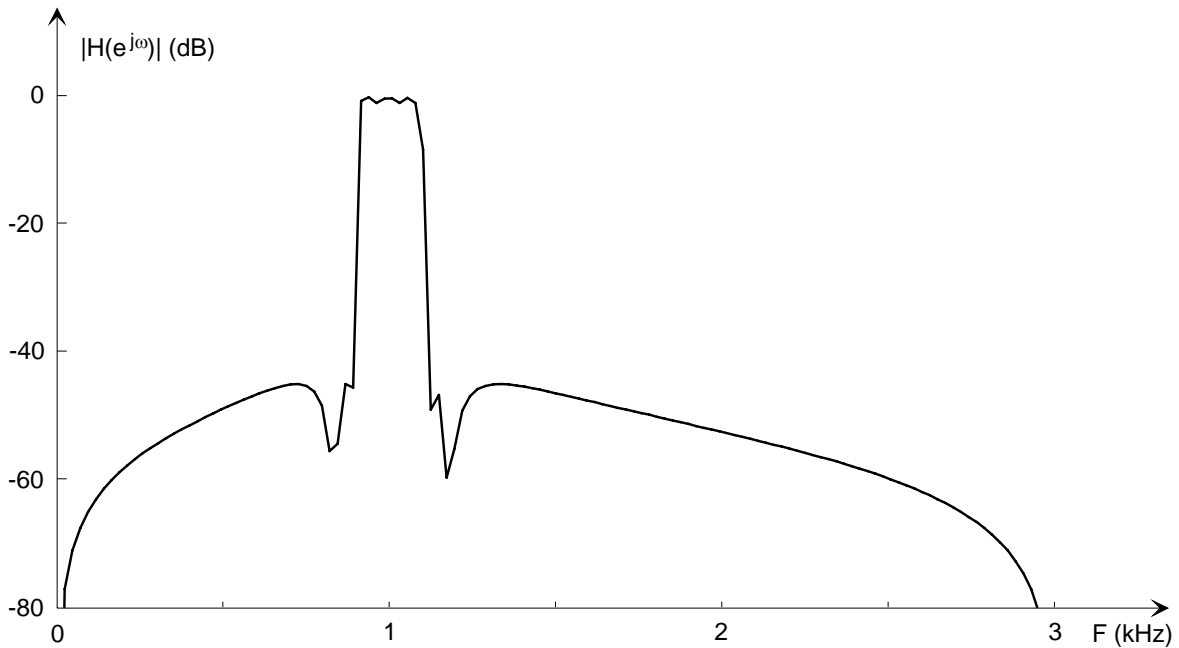
učestanosti analogne filtarske funkcije,  $\bar{\omega}_{p1} = 6114 \text{ rad/s}$ ,  $\bar{\omega}_{p2} = 7793 \text{ rad/s}$ ,  $\bar{\omega}_{a1} = 5343 \text{ rad/s}$  i  $\bar{\omega}_{a2} = 8719 \text{ rad/s}$ . Minimalni red prototipske NF funkcije prenosa iznosi 7, tako da red funkcije prenosa filtra propusnika opsega, koji je dvostruko veći, iznosi  $N = 14$ . Posle sinteze analogne NF funkcije prenosa, transformacije funkcije prenosa propusnika niskih učestanosti u propusnik opsega u analognom domenu i bilinearne transformacije, dobijaju se položaji nula i polova funkcije prenosa u  $z$ -ravni koji su prikazani u Tabeli 8.3. Amplitudska karakteristika traženog eliptičkog filtra prikazana je na slici 8.20.



Slika 8.19 Amplitudske karakteristike digitalnih VF filtera.

Tabela 8.3 Nule i polovi digitalnog eliptičkog filtra propusnika opsega.

Nule	Polovi
$\pm 1.000000$	$0.406134 \pm j0.912064$
$0.329228 \pm j0.944251$	$0.411070 \pm j0.903232$
$0.388203 \pm j0.921574$	$0.431553 \pm j0.877324$
$0.398722 \pm j0.917072$	$0.586917 \pm j0.807897$
$0.643432 \pm j0.765503$	$0.577913 \pm j0.807730$
$0.602006 \pm j0.798491$	$0.548131 \pm j0.811657$
$0.594011 \pm j0.804457$	$0.485863 \pm j0.834711$

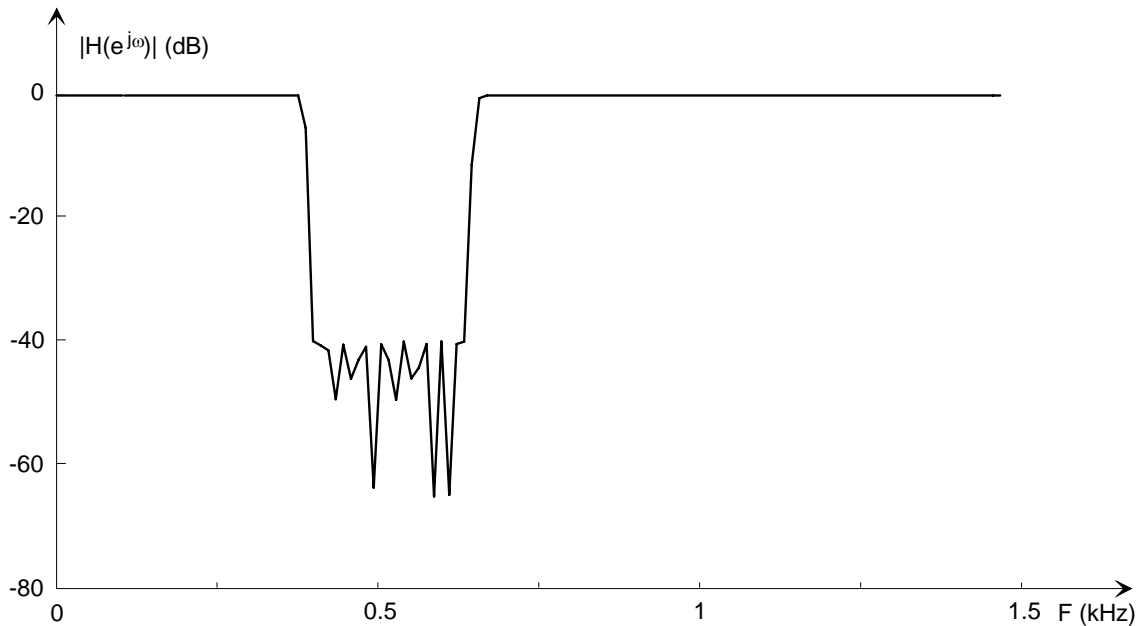


Slika 8.20 Amplitudska karakteristika digitalnog eliptičkog filtra propusnika opsega.

U četvrtom primeru biće pokazana sinteza filtra nepropusnika opsega, Čebiševljevog tipa druge vrste, koji treba da zadovolji sledeće specifikacije: učestanost odabiranja  $f_s = 3$  kHz,  $f_{p1} = 0.35$  kHz,  $f_{p2} = 0.7$  kHz,  $\alpha_p = 0.5$  dB,  $f_{a1} = 0.43$  kHz,  $f_{a2} = 0.6$  kHz,  $\alpha_a = 40$  dB. Za tražene granične učestanosti u diskretnom domenu, lako se dobija:  $\bar{\Omega}_{p1} = 0.73304$ ,  $\bar{\Omega}_{p2} = 1.46608$ ,  $\bar{\Omega}_{a1} = 0.90059$  i  $\bar{\Omega}_{a2} = 1.25664$ . Postupkom predistorzije dobijaju se granične učestanosti analognog filtra nepropusnika opsega:  $\bar{\omega}_{p1} = 2303$  rad/s,  $\bar{\omega}_{p2} = 5402$  rad/s,  $\bar{\omega}_{a1} = 2901$  rad/s i  $\bar{\omega}_{a2} = 4359$  rad/s. Minimalni red NF funkcije prenosa iznosi 12, tako da je red funkcije prenosa  $N = 24$ . Posle sinteze analogne NF funkcije prenosa, transformacije NF funkcije prenosa u nepropusnik opsega u analognom domenu i bilinearne transformacije, dobijaju se položaji nula i polova funkcije prenosa u z-ravni koji su prikazani u Tabeli 8.4. Amplitudska karakteristika filtra nepropusnika opsega učestanosti je prikazana na slici 8.21.

Tabela 8.4 Nule i polovi digitalnog filtra nepropusnika opsega.

Nule	Polovi
$0.236696 \pm j0.971584$	$0.206821 \pm j0.961726$
$0.254807 \pm j0.966991$	$0.219346 \pm j0.927302$
$0.289525 \pm j0.957172$	$0.248823 \pm j0.891907$
$0.337832 \pm j0.941204$	$0.292095 \pm j0.856430$
$0.395196 \pm j0.918598$	$0.345409 \pm j0.821812$
$0.456208 \pm j0.889873$	$0.404537 \pm j0.789296$
$0.515252 \pm j0.857037$	$0.682248 \pm j0.714515$
$0.675687 \pm j0.737192$	$0.655712 \pm j0.707035$
$0.665021 \pm j0.746814$	$0.619904 \pm j0.708802$
$0.643668 \pm j0.765317$	$0.575331 \pm j0.718940$
$0.611096 \pm j0.791547$	$0.523068 \pm j0.736481$
$0.567940 \pm j0.823076$	$0.465092 \pm j0.760360$



Slika 8.21 Amplitudska karakteristika digitalnog filtra nepropusnika opsega učestanosti.

## 8.6 DIREKTNA SINTEZA U Z-RAVNI

Postupak sinteze funkcije prenosa IIR sistema može se obaviti i direktno u  $z$ -ravni. Na primer, ako se kvadrat amplitudske karakteristike funkcije prenosa definiše kao:

$$\left| H_B(e^{j\Omega}) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\tan(\Omega/2)}{\tan(\Omega_p/2)} \right)^{2N}} \quad (8.165)$$

dobija se Batervortova aproksimacija u diskretnom domenu. Na sličan način se mogu definisati i ostale poznate aproksimacije analognih filtarskih funkcija. Međutim, opisana tehnika aproksimacije nije našla širu primenu bar iz dva razloga. Prvo, dosta je teško operisati sa trigonometrijskim polinomima koji se pojavljuju u postupku aproksimacije. Drugo, za razliku od sinteze analognih filtara, iz izraza (8.165) teško je odrediti položaj polova u  $z$ -ravni čak i kada se koriste računarski programi.

Direktna sinteza u  $z$ -ravni se stoga koristi samo kada sintezu tražene funkcije prenosa nije moguće izvršiti preslikavanjem analogne funkcije prenosa. Takvi su slučajevi aproksimacije amplitudske karakteristike kada se u gabaritima pojavljuju segmenti gde amplituda nije konstantna. Takvi su i slučajevi kada je potrebno aproksimirati linearnu faznu karakteristiku, ili, kada su simultano postavljeni gabariti za amplitudsku i faznu karakteristiku. Ako su postavljeni uslovi za ponašanje sistema u vremenskom domenu takođe se mora primeniti metod direktne sinteze u  $z$ -domenu.

### 8.6.1 OPTIMIZACIJA U FREKVENCIJSKOM DOMENU

Neka je funkcija prenosa IIR sistema data u obliku pogodnom za kaskadnu realizaciju:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (8.166)$$

gde su nepoznati parametri konstanta  $A$  i koeficijenti parcijalnih funkcija prenosa  $b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}$  i  $a_{2k}$ ,  $k = 1, \dots, N_s$ . Na jediničnom krugu, frekvencijski odziv posmatranog sistema je:

$$H(e^{j\Omega}) = A \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + b_{1k} e^{-j\Omega} + b_{2k} e^{-j2\Omega}}{1 + a_{1k} e^{-j\Omega} + a_{2k} e^{-j2\Omega}} = M(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} \quad (8.167)$$

gde je:

$$M(\Omega) = |H(e^{j\Omega})| = \left| A \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + b_{1k} e^{-j\Omega} + b_{2k} e^{-j2\Omega}}{1 + a_{1k} e^{-j\Omega} + a_{2k} e^{-j2\Omega}} \right| \quad (8.168)$$

amplitudska karakteristika sistema, dok je:

$$\theta(\Omega) = \arg H(e^{j\Omega}) \quad (8.169)$$

fazna karakteristika sistema. Umesto fazne karakteristike, u optimizaciji se koristi grupno kašnjenje definisano izrazom:

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} = -\left[ \frac{d\theta(z)}{dz} \right]_{z=e^{j\Omega}} \frac{dz}{d\Omega} \quad (8.170)$$

odakle se, primenom na (8.166) i (8.169) dobija:

$$\tau(\Omega) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{N_s} \left[ \frac{b_{1k} e^{j\Omega} + b_{2k}}{e^{j2\Omega} + b_{1k} e^{j\Omega} + b_{2k}} - \frac{a_{1k} e^{j\Omega} + 2a_{2k}}{e^{j2\Omega} + a_{1k} e^{j\Omega} + a_{2k}} \right] \right\} \quad (8.171)$$

što je, zbog činjenice da je  $\tau(\Omega)$  racionalna funkcija, znatno pogodniji oblik za optimizaciju.

Neka su tražena amplitudska karakteristika,  $M(\Omega)$ , i grupno kašnjenje,  $\tau(\Omega)$ , specificirani na  $L$  diskretnih učestanosti  $\Omega_i$  u opsegu  $0 \leq \Omega \leq \pi$ . Broj diskretnih tačaka  $L$  treba da bude bar pet puta veći od broja slobodnih parametara, dakle  $L > 20N_s$ . Najčešće se tačke biraju da njihovo rastojanje bude ekvidistantno. Greška amplitudske karakteristike definiše se kao:

$$E_A = \sum_{i=1}^L W_A(\Omega_i) [M(\Omega_i) - M_D(\Omega_i)]^{2m} \quad (8.172)$$

dok se greška grupnog kašnjenja definiše sa:

$$E_\tau = \sum_{i=1}^L W_\tau(\Omega_i) [\tau(\Omega_i) - \tau_D(\Omega_i) - \tau_0]^{2p} \quad (8.173)$$

U izrazima (8.172) i (8.173)  $M_D(\Omega_i)$  i  $\tau_D(\Omega_i)$  su specificirane vrednosti amplitude i grupnog kašnjenja,  $m$  i  $p$  su celobrojne konstante koje bira korisnik, dok je  $\tau_0$  promenljivi parametar koji se iterativno podešava tokom optimizacije. Funkcije  $W_A(\Omega_i)$  i  $W_\tau(\Omega_i)$  predstavljaju tzv. težinske funkcije kojima se podešava raspodela greške po opsezima. Ukupna greška aproksimacije definiše se kao:

$$E = \alpha E_A + (1 - \alpha) E_\tau \quad (8.174)$$

Ako je  $\alpha = 1$ , podešava se samo amplitudska karakteristika, dok se u slučaju  $\alpha = 0$  podešava samo karakteristika grupnog kašnjenja. Za vrednosti  $0 < \alpha < 1$  vrši se simultana optimizacija amplitude i grupnog kašnjenja. Ukupan broj promenljivih parametara od kojih zavisi ukupna greška

$E$  je  $4N_s + 2$  i to:  $4N_s$  koeficijenata funkcije prenosa  $b_{1k}$ ,  $b_{2k}$ ,  $a_{1k}$  i  $a_{2k}$ , pojačavačka konstanta  $A$  i konstantno grupno kašnjenje  $\tau_0$ . Podešavanjem ovih parametara treba odrediti minimum funkcije  $E$ . Ako se promenljivi parametri jednoobrazno označe sa  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, 4N_s + 2$ , onda se minimum funkcije  $E$  može odrediti rešavanjem sistema od  $4N_s + 2$  nelinearne jednačine:

$$\frac{\partial E}{\partial t_i} = \alpha \frac{\partial E_A}{\partial t_i} + (1 - \alpha) \frac{\partial E_\tau}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 4N_s + 2 \quad (8.175)$$

Sistem nelinearnih jednačina može se rešiti, na primer, Njutn-Rafson-ovom metodom. Međutim, dobijeno rešenje nije jedinstveno i nema garancije da predstavlja globalni minimum. Mnogo bolji rezultati se dobijaju postupkom koji je predložen u [D-2], gde se koristi poznati iterativni Flečer-Pauel algoritam [F-4] za minimizaciju funkcije više promenljivih. Pošto je Flečer-Pauel algoritam namenjen za minimizaciju funkcija bez ograničenja vrednosti parametara, a pošto bi se tokom iterativnog procesa moglo desiti da polovi izađu izvan jediničnog kruga, osnovni minimizacioni algoritam je modifikovan tako da ne dozvoljava da vrednost parametara  $a_{2k}$  bude veća od jedan. Na taj način, ako se usvoji stabilno početno rešenje, optimizacioni postupak dovodi do stabilnog rešenja koje predstavlja lokalni optimum. Nalaženje globalnog optimuma može se izvršiti višestrukim ponavljanjem postupka optimizacije sa različitim početnim rešenjima.

Izbor konstanti  $m$  i  $p$ , koje definišu stepen greške, vodi ka različitim tipovima aproksimacije željenih karakteristika. Najčešće vrednosti za konstante  $m$  i  $p$  su  $m = p = 1$  kada izrazi (8.172) i (8.173) predstavljaju srednju kvadratnu grešku amplitude, odnosno kašnjenja. Ako su  $m$  i  $p$  veći od jedan, male greške postaju manje značajne dok se većim greškama pridaje veći značaj. U graničnom slučaju kada  $m, p \rightarrow \infty$ , dobija se greška koja je optimalna u minimaks (Čebiševljevom) smislu.

### 8.6.2 KOREKCIJA GRUPNOG KAŠNJENJA SELEKTIVNIH FILTARA

Funkcije prenosa minimalne faze, koje osim polova imaju i nule unutar jediničnog kruga, imaju jednoznačnu vezu između amplitudske i fazne karakteristike. Zbog toga, selektivne funkcije prenosa imaju lošu faznu karakteristiku i obratno. U telekomunikacionim sistemima je često potrebno sintetizovati funkciju prenosa sistema koji ima dobru selektivnost ali i dobru linearnost fazne karakteristike. Uobičajeni način rešavanja takvog problema je upotreba kaskadne veze sistema minimalne faze  $H_F(z)$  koji obezbeđuje selektivnost i sistema neminimalne faze  $H_{AP}(z)$  kojim se koriguju izobličenja fazne karakteristike. Dakle:

$$H(z) = H_F(z)H_{AP}(z) \quad (8.176)$$

Funkcija prenosa  $H_F(z)$  se projektuje uobičajenim metodima za projektovanje selektivnih funkcija prenosa IIR tipa koji su opisani u prethodnim odeljcima.

S druge strane, frekvencijski odziv funkcije prenosa  $H_{AP}(z)$  mora zadovoljavati uslove:

$$|H_{AP}(e^{j\Omega})| = 1, \quad 0 \leq \Omega \leq \pi \quad (8.177)$$

$$\tau_{AP}(\Omega) = \tau - \tau_F(\Omega), \quad \Omega_{p1} \leq \Omega \leq \Omega_{p2} \quad (8.178)$$

gde je  $\tau$  konstantno kašnjenje koje treba odrediti, a  $\Omega_{p1}$  i  $\Omega_{p2}$  granice propusnog opsega selektivnog filtra. Funkcija prenosa  $H_{AP}(z)$  projektuje se optimizacionim metodama. Polazi se od specijalnog oblika funkcije prenosa *propusnika svih učestanosti* koja se sastoji od kaskadne veze ćelija prvog ili drugog reda:

$$H_{AP}(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{a_{1k} + z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1}} \quad (8.179)$$

$$H_{AP}(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{a_{2k} + a_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (8.180)$$

U oba slučaja se može lako pokazati da nule funkcije prenosa  $H_{AP}(z)$  leže izvan jediničnog kruga i da zadovoljavaju uslov:

$$z_i = \frac{1}{p_i}, \quad i = 1, \dots \quad (8.181)$$

što obezbeđuje zadovoljavanje uslova (8.177). U optimizacionom procesu određuju se vrednosti  $\tau$  i  $N_s$  parametara  $a_{1k}$  (i  $a_{2k}$  ako se koriste ćelije drugog reda). Kao i u prethodnom slučaju, mora se voditi računa o stabilnosti koja se obezbeđuje ako slobodni parametri zadovoljavaju uslove:

$$|a_{1k}| < 1 \quad (8.182)$$

ako se koristi oblik (8.179), ili,

$$|a_{1k}| < 1 + a_{2k}, \quad |a_{2k}| < 1 \quad (8.183)$$

ako se koristi oblik (8.180).

### 8.6.3 SINTEZA U VREMENSKOM DOMENU

Ponekad se zadatak sinteze postavlja tako da treba odrediti funkciju prenosa  $H(z)$ , sa impulsnim odzivom  $h[n]$ , koji u nekom smislu aproksimira željeni impulsni odziv,  $h_D[n]$ . Dakle,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (8.184)$$

Kao mera odstupanja realizovanog impulsnog odziva  $h[n]$  od željenog impulsnog odziva  $h_D[n]$  često se koristi kriterijum srednje kvadratne greške:

$$E = \sum_{n=0}^L (h_D[n] - h[n])^2 \quad (8.185)$$

gde je gornja granica sume (8.185),  $L$ , jednaka broju slobodnih parametara (koeficijenata) funkcije  $H(z)$ , dakle,  $L = N + M + 1$ . Postupak određivanja nepoznatih parametara poznat je kao *Padeova aproksimacija* (Padé).

Diferencna jednačina koja odgovara funkciji prenosa  $H(z)$  je prema (6.39):



$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (8.186)$$

Kada se sistem pobudi jediničnim impulsom, odziv sistema je  $h[n]$ . Jednačina (8.186) tada dobija oblik:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.187)$$

Pošto je  $\delta[n-k] = 0$ , osim za  $n = k$ , jednačina (8.187) se svodi na:

$$h[n] = b_n - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], \quad 0 \leq n \leq M \quad (8.188)$$

odnosno na oblik,

$$h[n] = - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], \quad n > M \quad (8.189)$$

U delu sistema linearnih jednačina (8.188) ima  $M + 1$  jednačina, tako da iz sistema (8.189) treba uzeti prvih  $N$  jednačina da bi se formirao rešiv sistem linearnih jednačina. Sistem se jednostavno rešava na sledeći način. Prvo se iz sistema (8.189) odredi  $N$  nepoznatih parametara  $a_k$ . Zatim se iz sistema (8.188) odredi preostalih  $M + 1$  nepoznatih parametara  $b_k$ .

Padeova aproksimacija obezbeđuje potpuno poklapanje prvih  $L$  odbiraka realizovanog impulsnog odziva  $h[n]$  i željenog impulsnog odziva  $h_D[n]$ . To znači da će se sa porastom složenosti filtra poklapati više odbiraka oba odziva. Dakle, glavni nedostatak opisanog metoda aproksimacije je što dobijena funkcija prenosa ima veliki broj nula i polova.

Interesantno je pitanje koliko funkcija prenosa  $H(z)$  odstupa od funkcije prenosa  $H_D(z)$ , koja se može odrediti primenom  $z$ -transformacije na  $h_D[n]$ . Ako je  $H_D(z)$  racionalna funkcija, i ako je red polinoma u brojiocu i imeniocu funkcije  $H_D(z)$  unapred poznat, onda se tražena funkcija prenosa  $H(z)$  može odrediti apsolutno tačno. Na žalost, ovi uslovi su retko zadovoljeni u praksi, tako da će funkcija  $H(z)$  biti samo aproksimacija funkcije  $H_D(z)$ . Najbolji rezultati u primeni Padeove aproksimacije se dobijaju ako se eksperimentiše sa vrednostima za  $M$  i  $N$  dok se ne dobije frekvencijski odziv rezultujućeg filtra, koji odstupa od željenog odziva za malu, unapred propisanu grešku. Međutim, pošto je kriterijum za optimizaciju baziran isključivo na ponašanju u vremenskom domenu, frekvencijski odziv rezultujućeg filtra je obično loš, naročito zbog malog slabljenja u nepropusnom opsegu. Zbog toga, Padeova aproksimacija često služi kao jednostavan metod za određivanje početnog rešenja za neki bolji optimizacioni postupak.