DIGITALNA OBRADA SIGNALA
21.01.2019. u 15:00

1. Trajanje ispita 180 minuta.
2. Ispit se radi u vežbanci.
3. Na naslovnoj strani **obavezno** zaokružiti redne brojeve zadataka koji su rađeni.

Zadatak 1 (15 poena)

Potrebno je projektovati sistem za digitalnu obradu signala koji meri harmonijska izobličenja u struji kojom uređaji opterećuju distributivnu električnu mrežu. Idealan napon distributivne električne mreže je sinusoidalnog talasnog oblika učestanosti $f_0 = 50$ Hz, i u idealnom slučaju, u slučaju pasivnog opterećenja, bi i struja trebalo da ima takav oblik, sa eventualno pomerenim faznim stavom. Međutim, na distribitivnu mrežu se priključuju i uređaji koji opterećuju sistem sa strujom koja odstupa od sinusoidalne i poseduje i više harmonike (npr. struja ispravljača). Sistem za digitalnu obradu signala, u što kraćem vremenskom intervalu, treba da proveri da li viši harmonici struje u nekom opsegu, po amplitudi, prelaze standardom propisane vrednosti.

a) [5] Nacrtajte šemu potrebnog sistema za digitalnu obradu signala i ukratko objasnite ulogu svakog bloka na šemi. Karakteristika senzora struje može da se aproksimira NF filtrom sa graničnom učestanošću 100 kHz.

b) [5] Odredite graničnu učestanost *anti-aliasing* filtra iz tačke a) i minimalnu učestanost odabiranja signala koja je potrebna da bi se ispravno detektovao 40. harmonik struje.

c) [5] Pod pretpostavkom da je *anti-aliasing* filtar iz tačke a) idealan, predložite učestanost odabiranja veću od minimalne i odredite minimalan broj odbiraka koji je potrebno uzeti tako da se pri učestanosti osnovnog harmonika $f_0 = 50$ Hz u spektru DFT-a dobiju tačno svi harmonici struje. Šta se dešava ako se usled velikog opterećenja mreže učestanost mrežnog signala promeni na 49,5 Hz? Šta se dešava ako se učestanost mrežnog signala ne menja, a DFT se računa nekim *radix*-2 algoritmom?

Zadatak 2 (25 poena)

Date su realne sekvence $x_1[n]$ i $x_2[n]$:

$$x_1[n] = \cos(2\pi Fn) \text{ i } x_2[n] = \sin(2\pi Fn),\ n = 0,1,2,3,4,5,6,7.$$

a) [5] Ako je $F = 1/4$, izračunajte $X[k]$, DFT sekvence $x[n] = x_1[n] + j\cdot x_2[n]$ u $N = 8$ tačaka.

b) [5] Korišćenjem osobina DFT-a izračunajte $X_1[k]$ i $X_2[k]$ iz $X[k]$.

c) [8] Ako se relativna učestanost pomenutih signala F menja u opsegu od 0 do 1 skicirajte zavisnost amplitudske karakteristike $X[2]$ od učestanosti F. Za koje vrednosti F je $|X[2]|$ jednako nuli?

d) [7] Ako se signal $x[n]$ pomnoži pravougaonom prozorskom funkcijom dužine 5 odbiraka, skicirajte amplitudski spektar DFT-a novodobijenog signala $y[n] = x[n] \cdot w_{R5}[n]$ i objasnite zbog čega se dobija takav spektar.

Zadatak 3 (30 poena)

Impulsno invarijantnom transformacijom potrebno je projektovati niskopropusni digitalni IIR filtar iz analognog Batervortovog prototipa. Specifikacije filtra su: granična učestanost propusnog opsega $\Omega_p = \pi/6$, granična učestanost nepropusnog opsega $\Omega_a = 2\pi/3$, maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu $\alpha_p = 3$ dB i minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $\alpha_a = 24$ dB.

a) [15] Odredite granične učestanosti ω_p i ω_a analognog prototipa, a zatim odredite minimalni red filtra kojim će se zadovoljiti definisane specifikacije.

b) [5] Skicirajte raspored nula i polova analogne funkcije prenosa.

c) [10] Odredite prenosnu funkciju traženog niskopropusnog digitalnog IIR filtra.

Zadatak 4 (30 poena)

Pomoću trougaone prozorske funkcije i impulsnog odziva idealnog filtra potrebno je projektovati FIR filtar koji se koristi za promenu učestanosti odabiranja signala 2 puta (decimaciju i interpolaciju). Filtar treba da bude 18. reda i da ima linearnu faznu karakteristiku.

a) [10] Izračunajte impulsni odziv $h[n]$ idealnog filtra koji se koristi za projektovanje filtra iz ovog zadatka.

b) [5] Odredite i skicirajte trougaoni prozor koji je potrebno iskoristiti za projektovanje FIR filtra, a zatim odredite impulsni odziv traženog FIR filtra korišćenjem dobijenih rezultata iz ove i prethodne tačke.

c) [5] Nacrtati direktnu transponovanu realizaciju FIR filtra iz tačke b).

d) [5] Skicirati blok šemu decimatora i interpolatora za promenu učestanosti odabiranja od 4 puta, a koji koriste blokove projektovanog FIR filtra iz tačke c).

e) [5] Ako se na izlaz decimatora iz tačke d) poveže ulaz interpolatora iz tačke d) izračunati ukupno grupno kašnjenje izraženo u sekundama od ulaza decimatora do izlaza interpolatora. Ulazni signal je odabiran na učestanosti $f_S = 1$ kHz.

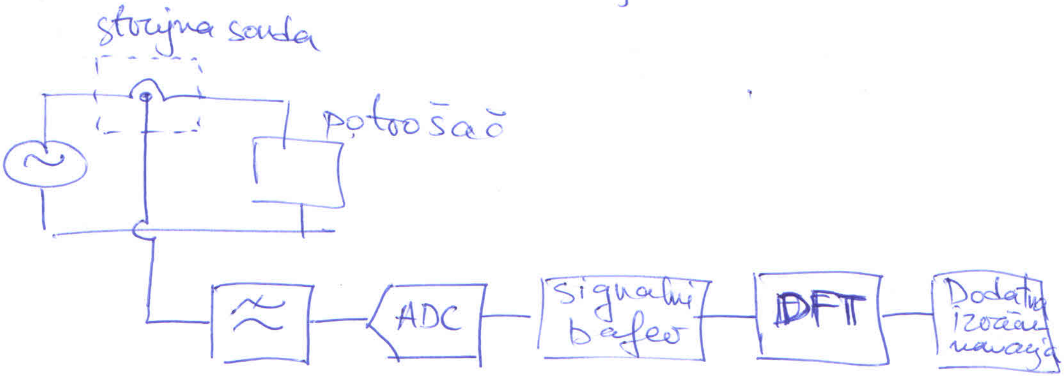
Digitalna obrada signala (13E043DOS)

januar 2019.

- rešenja zadataka -

1.

a)



b) 40. harmonik je na $f = 40 f_0 = 2\,kHz$ $\quad f_s > 2f = 4\,kHz$

c) $f_s = 8\,kHz$

$$\Omega_k = 2\pi \frac{k}{N} = \frac{f_j}{f_s}\cdot 2\pi \Rightarrow \frac{k}{N} = \frac{f_j}{f_s}, \; k \in \mathbb{Z}, \; \forall f_j$$

$$f_{j\,min} = f_0 = 50\,Hz \quad \frac{50\,Hz}{8000\,Hz} = \frac{1}{160} = \frac{k_0}{N}, \quad k_{0,min} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$N = 160$$

$$f_0 \to k = 1, \; f_1 \to k = 2, \; f_2 \to k = 3, \; f_{39} \to k = 40$$

$$f_0 = 49.5 \Rightarrow F_0 = \frac{49.5}{8000} \neq \frac{k}{160}$$ → curenje spektra

radix-2 : $N_{R2} = 2^N$ $\quad F_0 = \frac{1}{160} = \frac{x}{2^N}$ $\quad x \notin \mathbb{Z}$ → curenje spektra

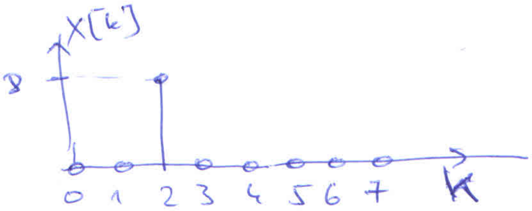
(2)

a) $x_1[n] = \cos(2\pi F n) \qquad x_2[n] = \sin(2\pi F n)$

$$x[n] = x_1[n] + j x_2[n] = e^{j2\pi F n}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} e^{j2\pi F n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot kn} = \sum_{n=0}^{7} e^{j2\pi n\left(F - \frac{k}{8}\right)}$$

$$\text{za } F = 1/4 : \; X[k] = \begin{cases} 8, & \text{za } k = 2 \\ 0, & \text{za } k \neq 2 \end{cases}$$



b)

$$x[n] = x_1[n] + j x_2[n] \Rightarrow X[k] = X_1[k] + j X_2[k]$$
$$n = 0, \ldots 7 \qquad k = 0, \ldots 7$$

$$x_1[n] = \frac{x[n] + x^*[n]}{2}$$

$$x_2[n] = \frac{x[n] - x^*[n]}{2}$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[N-k]$$

$N=8 \Rightarrow$

$$X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[8-k]}{2}$$

$$X_2[k] = \frac{X[k] - X^*[8-k]}{2j}$$

$$X[k] = [0\ 0\ 8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

$$X^*[8-k] = [X^*[0]\ X^*[7]\ X^*[6] \ldots X^*[1]] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0]$$

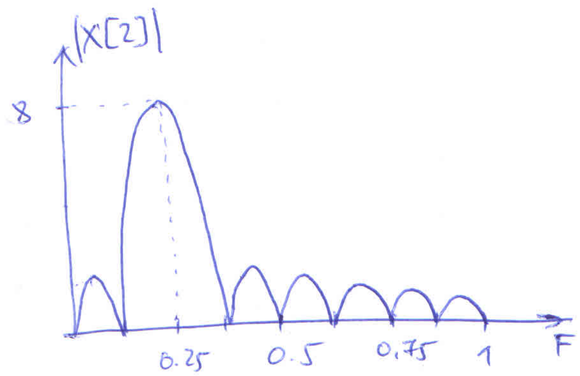
$$X^*[8] = X^*[0]$$

$\Downarrow$

$$X_1[k] = [0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 0\ 4\ 0] \qquad X_2[k] = [0\ 0\ -4j\ 0\ 0\ 0\ 4j\ 0]$$

c)

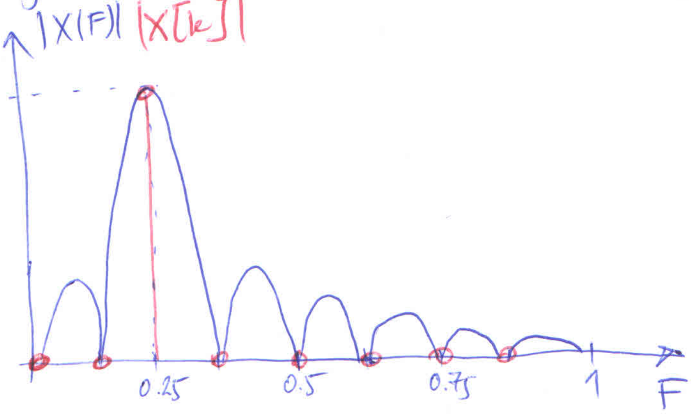
$$|X[2]| = \left|\sum_{n=0}^{7} e^{j2\pi n(F - 1/4)}\right| = \left|\frac{1 - e^{-j2\pi \cdot 8(1/4 - F)}}{1 - e^{-j2\pi(\frac{1}{4} - F)}}\right| = \left|\frac{\sin(8(\pi/4 - F \cdot \pi))}{\sin(\pi/4 - F \cdot \pi)}\right|$$



② d) Signal $x[n]$ je proizvod kompleksne sinusoide beskonačnog trajanja i pravougaone prozorske funkcije dužine 8 odbiraka:

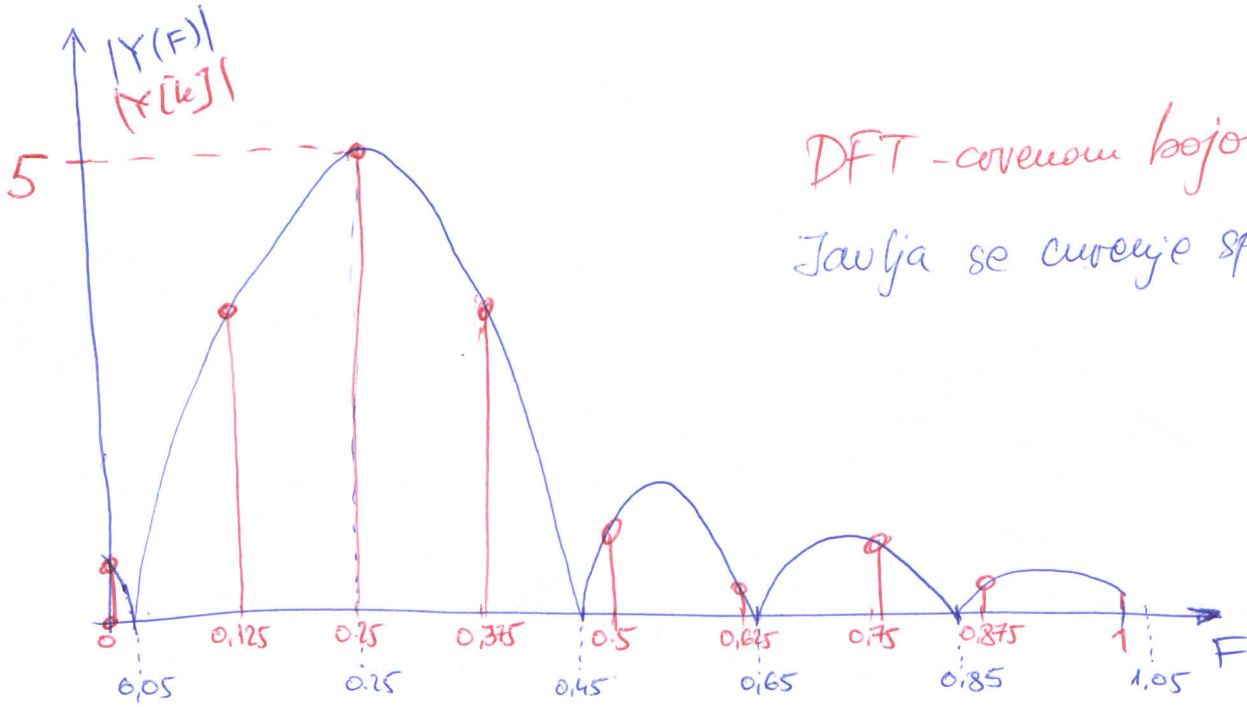
$x[n] = x_{id}[n] \cdot w_{R8}[n]$ $\quad x_{id}[n] = e^{j2\pi F n}, \ n \in (-\infty, +\infty)$

Furijeova transformacija signala $x[n]$ je:



Crvenom bojom su označene tačke odabiranja FT-a i jasno se vidi da nema curenja spektra.

~~Fou~~ Amplitudska karakteristika signala $y[n] = x[n] \cdot w_{R5}[n] =$
$= x_{id}[n] \cdot w_{R5}[n]$



DFT - crvenom bojom

Javlja se curenje spektra.

3\. a) $\left.\begin{array}{l}\omega_p = 1\,rad/s \\ \Omega_p = \pi/6 \\ \text{IIT}: \quad \Omega = \omega \cdot T\end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{\Omega_p}{\omega_p} = \frac{\pi}{6}\,s \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/6\,s} = 12\,rad/s$

$$\Omega_a = \omega_a \cdot T \Rightarrow \omega_a = \frac{\Omega_a}{T} = \frac{2\pi/3}{\pi/6}\,rad/s = 4\,rad/s$$

$$\alpha_a = 24\,dB \qquad \alpha_p = 3\,dB$$

$$|H_B(s)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(\frac{s}{j\omega_p}\right)^{2N}}$$

$$\alpha(s) = 20\log\frac{1}{|H_B(s)|} = 10\log\frac{1}{|H_B(s)|^2} = 10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{s}{j\omega_p}\right)^{2N}\right)$$

$$\alpha_p = \alpha(j\omega_p) = 10\log(1+\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p}-1} = 1$$

$$\alpha_a = \alpha(j\omega_a) = 10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{j\omega_a}{j\omega_p}\right)^{2N}\right) = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N}\right)$$

$$\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)^{2N} = 10^{0,1\alpha_a}-1 \Rightarrow N \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{\log(10^{0,1\alpha_a}-1)}{\log(\omega_a/\omega_p)} = \frac{1}{2}\,\frac{\log(10^{2,4}-1)}{\log 4} = 1,99$$

$$\boxed{N=2}$$

b)

$$H(s) = \frac{1}{s-e^{j3\pi/4}}\cdot\frac{1}{s-e^{-j3\pi/4}}$$

c) $H(s) = \frac{1}{s-e^{j3\pi/4}}\cdot\frac{1}{s-e^{-j3\pi/4}} =$

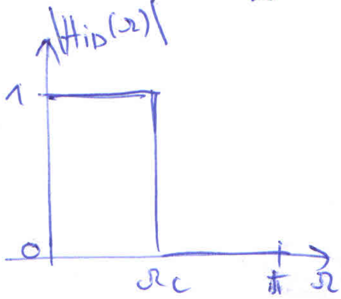
$$= \frac{-j\sqrt{2}/2}{s-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{j\sqrt{2}/2}{s-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i z}{z-e^{p_i T}} \Rightarrow$$

$$\boxed{H(z) = \frac{-j\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot z}{z-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi/6}} + \frac{j\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot z}{z-e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi/6}}}$$

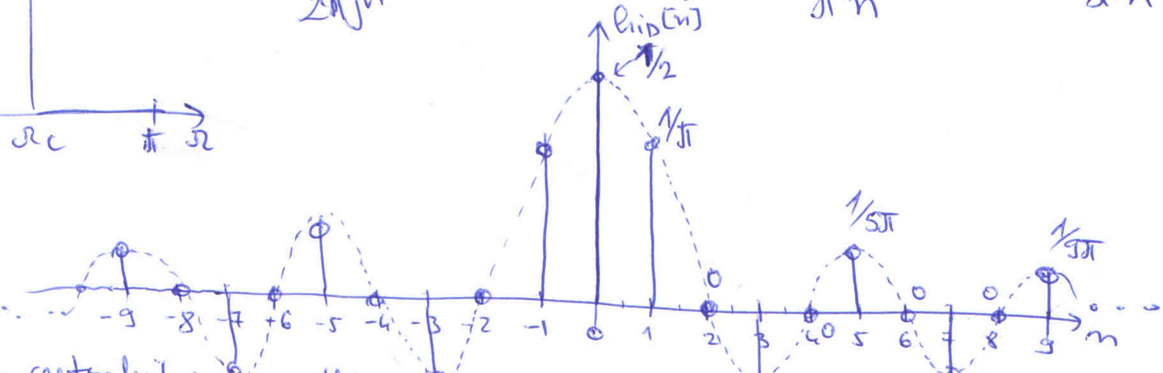
4.

a) $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$



$$h_{ID}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{ID}(\Omega)\, e^{+j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1\cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega =$$

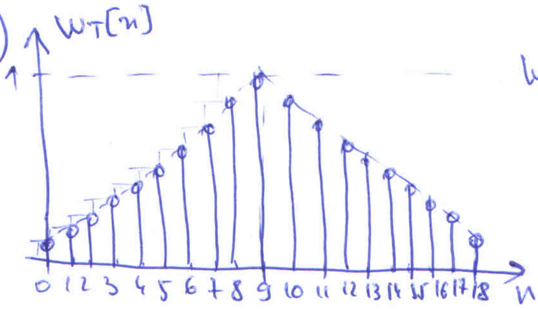
$$= \frac{1}{2\pi j n}\left(e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}\right) = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{\pi n}$$



Uzimamo centralnih 18+1 odbiraka:

$$h_D = \left[\frac{1}{9\pi}\ 0\ -\frac{1}{7\pi}\ 0\ \frac{1}{5\pi}\ 0\ -\frac{1}{3\pi}\ 0\ \frac{1}{\pi}\ 1/2\ \frac{1}{\pi}\ 0\ -\frac{1}{3\pi}\ 0\ \frac{1}{5\pi}\ 0\ -\frac{1}{7\pi}\ 0\ \frac{1}{9\pi}\right]$$

b)

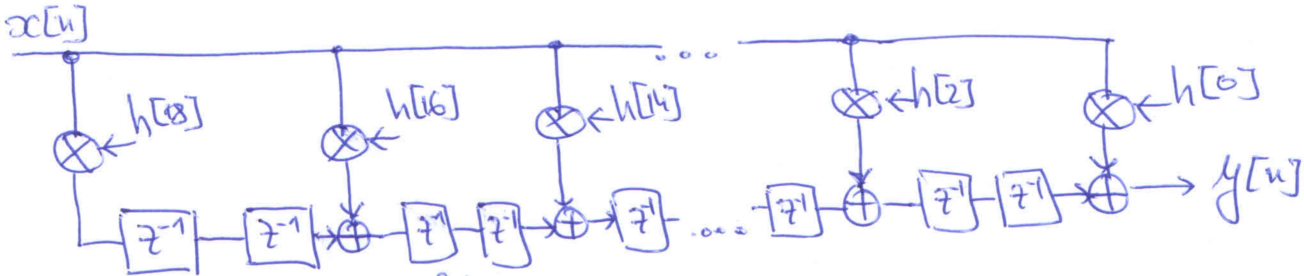


$$w_T = \left[\frac{1}{10}\ \frac{2}{10}\ \frac{3}{10}\ \frac{4}{10}\ \frac{5}{10}\ \frac{6}{10}\ \frac{7}{10}\ \frac{8}{10}\ \frac{9}{10}\ 1/2\ \frac{9}{10}\ \frac{8}{10}\ \frac{7}{10}\ \frac{6}{10}\ \frac{5}{10}\ \frac{4}{10}\ \frac{3}{10}\ \frac{2}{10}\ \frac{1}{10}\right]$$

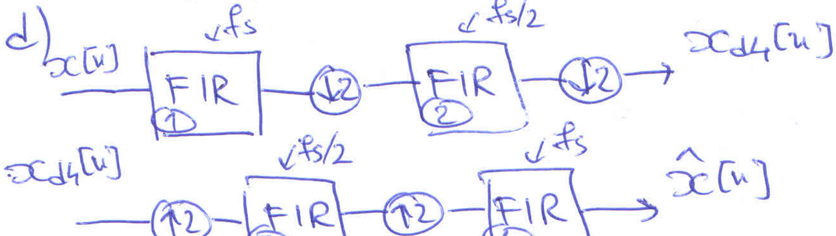
$$h[n] = h_D[n-9]\cdot w_T[n]$$

$$h[n] \to \left[\frac{1}{90\pi}\ 0\ -\frac{3}{70\pi}\ 0\ \frac{5}{50\pi}\ 0\ -\frac{7}{30\pi}\ 0\ \frac{9}{10\pi}\ 1/2\ \frac{9}{10\pi}\ 0\ -\frac{7}{30\pi}\ 0\ \frac{5}{50\pi}\ 0\ -\frac{3}{70\pi}\ 0\ \frac{1}{90\pi}\right]$$

c)



d)



↓2 → odbacivanje svakog drugog odbirka

↑2 → dodavanje nula između svaka dva odbirka

e) $\tau_g = \frac{M-1}{2} = \frac{19-1}{2} = 9$ odbiraka

$$\tau_g[s] = \tau_{g1} + \tau_{g2} + \tau_{g3} + \tau_{g4} = 9\cdot\frac{1}{f_s} + 9\cdot\frac{1}{f_s/2} + 9\cdot\frac{1}{f_s/2} + 9\cdot\frac{1}{f_s} =$$

$$= 9\cdot\frac{6}{f_s} = \underline{54\ ms}$$