Данило Ђокић, Сарадник у настави (соба 102г)
djokicd@etf.rs
Консултације: по договору (e-mail)

Термин 1 - Диференцне једначине

$$\phi(x[n], x[n-1], \dots, x[n-k]) = \emptyset \Rightarrow x[k]$$

$x[n] = k\, x[n-1]$, $k \in R$ $x[0] = a$

$\boxed{x[n] = \lambda^n}$

$\Rightarrow x[1] = k x[0] = ka$

$x[2] = k x[1] = k^2 a$

$\vdots$

$\boxed{x[n] = k^n a}$

$$e^{\lambda x} \xrightarrow{d/dt} \lambda e^{\lambda x} \sim e^{\lambda x}$$

$$\lambda^n \xrightarrow{n \mapsto n-1} \lambda^{n-1} = \frac{1}{\lambda}\lambda^n \sim \lambda^n$$

$$a_k x[n] + a_{k-1} x[n-1] + \dots + a_0 x[n-k] = \emptyset$$

$n \mapsto n+k$

$$a_k x[n+k] + a_{k-1} x[n+k-1] + \dots + a_0 x[n] = \emptyset$$

$x[0], x[1], \dots, x[k-1] \leftarrow$ почетне вр. $x[n] \to \lambda^n$

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + a_0 \lambda^n = \emptyset$$

$$\lambda^n \left(a_k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0\right) = \emptyset$$

$\neq 0$

$\deg P = k$

$\boxed{P(\lambda) = a_k \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0} \leftarrow$ корени $P(x)$

1° $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ $\boxed{\lambda_i^n}$ $\lambda_j^n \to a\lambda_i^n + b\lambda_j^n$

$$\boxed{x[n] = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n}$$

$x[0] = \dots$

$x[1] = \dots$

$$a_k\lambda^n + a_{k-1}\lambda^{n-1} + a_{k-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda^{n-k-1} + a_0\lambda^{n-k} = 0$$

$$\lambda^n\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{\lambda} + a_{k-2}\frac{1}{\lambda^2} + \dots + a_0\frac{1}{\lambda^k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\lambda^n}{\lambda^k}}_{\neq 0}\left(\boxed{a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + a_0}\right) = 0 \quad P(\lambda)$$

2° $\lambda_i = \lambda_j$ $\qquad c_i\lambda_i^n + c_j\lambda_i^n = (c_i + c_j)\lambda_i^n$

$\lambda_i^n ; n\lambda_i^n$ Корен λ вишеструкости q

$$\Rightarrow \boxed{\{\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{q-1}\lambda^n\}}$$

3° $P(\lambda) = a_k\lambda^k + \dots + a_0$, λ λ^* $\boxed{\{\lambda^n, \lambda^{*n}\}}$

$\boxed{\lambda = \rho e^{j\phi}} \Rightarrow c_i\lambda^n + c_j\lambda^{*n} =$

$$= c_i\rho^n(\cos(n\phi) + j\sin(n\phi)) + c_j\rho^n(\cos(n\phi) - j\sin(n\phi))$$

$$= \underbrace{(c_i + c_j)}_{c_i'}\boxed{\rho^n\cos(n\phi)} + \underbrace{j(c_i - c_j)}_{c_j'}\boxed{\rho^n\sin(n\phi)}$$

$$\{\rho^n\cos(n\phi), \rho^n\sin(n\phi)\}.$$

4° λ λ^* вишеструкости p

$$\boxed{\begin{array}{l}\rho^n\cos(n\phi),\ n\rho^n\cos(n\phi), \dots, n^{p-1}\rho^n\cos(n\phi)\\ \rho^n\sin(n\phi),\ n\rho^n\sin(n\phi), \dots, n^{p-1}\rho^n\sin(n\phi)\end{array}}$$

П:

Пример 1. Одредити решење диференцне једначине

$$x[n]-4x[n-1]+5x[n-2]-4x[n-3]+4x[n-4]=\emptyset \qquad \lambda^n$$

ако су познате помоћне вредности $x[0]=0$, $x[1]=1$, $x[2]=11$, $x[3]=41$.

$P(\lambda)=+\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4 \qquad \{1,-1,2,-2,4,-4\}$

$\boxed{P(2)=\emptyset} \quad (\lambda-2)$ Хорнерова шема *

	λ^4	λ^3	λ^2	λ	1
	1	-4	$+5$	-4	$+4$
2	1	-2	1	-2	$\boxed{\emptyset}$
2	1	$\emptyset$	1	$\emptyset$	
	λ^2	λ	1		

$P_1(\lambda)$

$\boxed{\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2}$

$1,-1$

$\lambda-2$

$P_1(2)=\emptyset$

$P_2(\lambda)=$

$=\lambda^2+1$

$\boxed{\{2,2,j,-j\}}$

$\{2,2\}\Rightarrow \boxed{2^n}, \boxed{n\cdot 2^n}$

$\{j,-j\}\Rightarrow j=1e^{j\frac{\pi}{2}}\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}, \boxed{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$

$$x[n]=C_1 2^n+C_2 n\cdot 2^n+C_3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+C_4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
x[0]&=0=C_1+C_3\\
x[1]&=1=2C_1+2C_2+C_4\\
x[2]&=11=-C_3+8C_2+4C_1\\
x[3]&=41=8C_1+24C_2-C_4
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\boxed{C_1=-1,\ C_2=2 \\ C_3=1,\ C_4=-1}$

Пример 2. Одредити решење диференцне једначине

$x[n] + x[n-1] - x[n-2] - x[n-3] = 0$ $\Rightarrow$ $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$

$+\lambda^3 \quad +\lambda^2 \quad -\lambda \quad -1$

које задовољава $x[0] = 2$, $x[1] = -1$ и $x[2] = 3$.

$= \lambda^2(\lambda+1) - (\lambda+1)$

$= (\lambda+1)(\lambda^2-1)$

$\quad -1 \qquad -1 \quad +1$

$= (\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-1)$

$\quad (-1) \qquad (-1) \qquad (+1)$

$\{-1,-1\} \rightarrow (-1)^n, \; n(-1)^n$

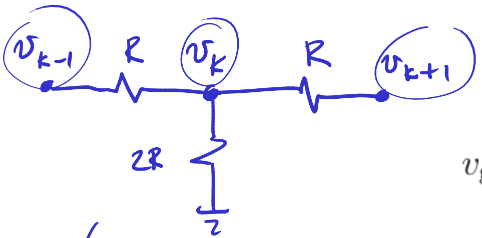
$\{1\} \rightarrow 1^n \rightarrow 1$

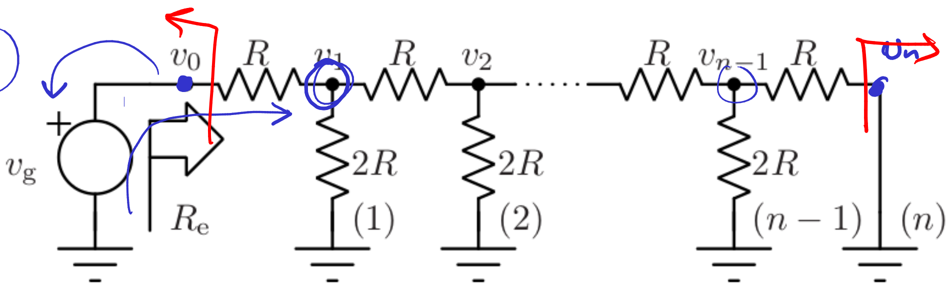
$\Rightarrow x[n] = C_1 + C_2(-1)^n + nC_3(-1)^n$

$\Rightarrow$ $\boxed{x[n] = \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}n\right)(-1)^n}$

```
(%i7) e1;
(%o7)                          C2 + C1 = 2
(%i8) e2;
(%o8)                   (- C3) - C2 + C1 = - 1
(%i9) e3;
(%o9)                      2 C3 + C2 + C1 = 3
(%i10) solve( [e1,e2,e3], [C1,C2,C3] );
                              3        5        1
(%o10)                 [[C1 = -, C2 = -, C3 = -]]
                              4        4        2
```

Пример 3[1]**.** У колу сталне струје са слике употребљени су редни отпорници $R = 50\,\Omega$ и оточни отпорници $2R$. Постоји $n-1$ оточних отпорника. На основу методе потенцијала чворова (а) поставити диференцну једначину за потенцијале $v[k] = v_k$. Поставити (б) одговарајуће граничне услове. Решити (в) добијену диференцну једначину. Израчунати (г) отпорност R_e коју „види“ напонски генератор за $n \to \infty$.





КПЧ: $v_k\left(\frac{1}{\cancel{R}} + \frac{1}{\cancel{R}} + \frac{1}{2\cancel{R}}\right) - v_{k+1}\cdot\frac{1}{\cancel{R}} - v_{k-1}\cdot\frac{1}{\cancel{R}} = 0$

(а) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{5}{2}v[k] - v[k+1] - v[k-1] = 0}$

$\boxed{\begin{array}{l} v[0] = v_g \\ v[n] = 0 \end{array}}$ (б)

$-v[k+1] + \frac{5}{2}v[k] - v[k-1] = 0$

$P(\lambda) = -\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda - 1$ $\Rightarrow$ Корени: $\{2, \frac{1}{2}\}$

$v[k] = C_1(2)^k + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$v[0] = \boxed{C_1 + C_2 = v_g}$

$v[n] = \boxed{C_1 2^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0}$

D

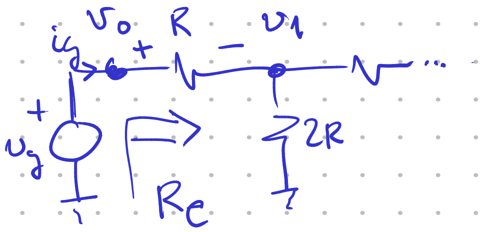
$$1\,C_1 + 1\,C_2 = v_g$$
$$2^{n} C_1 + 2^{-n} C_2 = 0$$

D_{c1}

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{D_{c1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} v_g & 1 \\ 0 & 2^{-n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2^{n} & 2^{-n} \end{vmatrix}} = \frac{2^{-n} v_g}{2^{-n} - 2^{n}}$$

$$C_2 = \frac{D_{c2}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & v_g \\ 2^{n} & 0 \end{vmatrix}}{2^{-n} - 2^{n}} = \frac{-2^{n} v_g}{2^{-n} - 2^{n}}$$

$$\Rightarrow \quad v[k] = \frac{2^{-n}2^{k} - 2^{n}2^{-k}}{2^{-n} - 2^{n}} v_g \Rightarrow \boxed{v[k] = \frac{2^{k-n} - 2^{n-k}}{2^{-n} - 2^{n}} v_g}$$



$$R_e^{(n\to\infty)} = \frac{v_g}{i_g} = \frac{v_g}{v_g - v_1^{(n\to\infty)}} \cdot R = \frac{v_g}{\frac{1}{2} v_g} R = 2R$$

$$v[1] = \frac{\cancel{2^{1-n}} + 2^{n-1}}{\cancel{2^{-n}} + 2^{n}} v_g \xrightarrow[n\to\infty]{k=1} \frac{1}{2} v_g$$

$$\boxed{R_e = 100\ \Omega}$$

$$a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_k x[n-k] = y[k] \qquad x = x_h + x_p$$