11 Фуријеова трансформација дискретног сигнала

Задаци

1. Дат је дискретан сигнал $x[n] = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \mathrm{u}[n+2]$. Одредити (а) његову Фуријеову трансформацију.

Скицирати (б) његов амплитудски спектар помоћу рачунара.

2. Систем је описан диференцном једначином $y[n] + \dfrac{1}{4}y[n-1] - \dfrac{1}{8}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$. Одредити (а) импулсни одзив тог систма применом дискретне Фуријеове трансформације. Израчунати појачање амплитуде и померај фазе на учестаностима $\Omega \in \left\{0, \dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}\right\}$.

3. Дискретан филтар, познат под називом *moving average* филтар, се реализује тако што се за одређивање текућег члана одзива усредње текућа и прејашњих четири вредности побуде. Скицирати (а) импулсни одзив овог филтра. Одредити (б) дискретне кружне учестаности Ω $(0 \leq \Omega \leq \pi)$ које овај филтар у потпуности потискује (уклања).

Скицирати (в) дијаграм амплитудске фреквенцијске карактеристике у опсегу $0 \leq \Omega < \pi$.

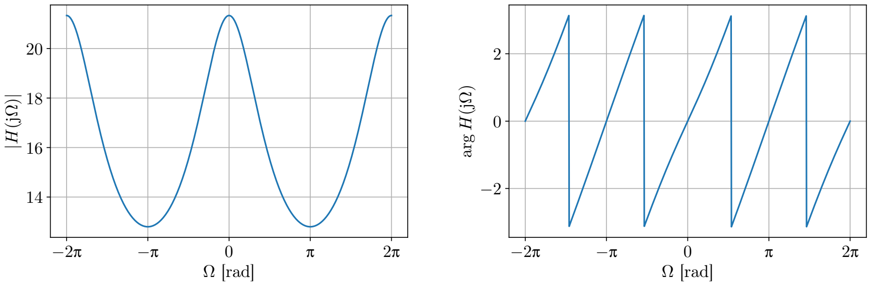
Tablice Furijeove transformacije diskretnih signala

$x[n]$	$X(j\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}$
$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta[n-pN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
1	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$
$\mathrm{sgn}[n]$	$\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\pi)$
$\cos(\Omega_0 n)$ $\cos(\Omega_0 n + \Theta)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) + \delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$ $\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}\,\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta}\,\delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$
$\sin(\Omega_0 n)$ $\sin(\Omega_0 n + \Theta)$	$\frac{\pi}{\mathrm{j}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) - \delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$ $\frac{\pi}{\mathrm{j}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}\,\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta}\,\delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$
$\mathrm{u}[n]$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$
$a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$
$(n+1)\,a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^2}$
$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)}\,a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^r}$
$\mathrm{rect}_{N_1}[n]$	$\frac{\sin(\Omega(N_1+0{,}5))}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
$\frac{\sin(W_1 n)}{\pi n} = \frac{W_1}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W_1 n}{\pi}\right), \quad 0 < W_1 < \pi$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2W_1} - 2k\pi\right)$
$\left(1 - \frac{2\lvert n\rvert}{\tau}\right) \mathrm{rect}_\tau[n]$	$\frac{\tau}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau\Omega}{4\pi}\right)$
$\sum_{p=\langle N\rangle} a_p\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\frac{2n\pi}{N}}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta\left(\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{\lvert n\rvert}}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{\lvert\Omega\rvert}}$

Решења

1. (а) $X(\mathrm{j}\Omega) = \dfrac{64\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega}}{4 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$,

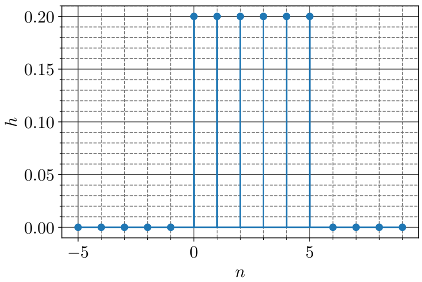
(б)



2. (а) $h[n] = \left(2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)\mathrm{u}[n]$

(б) $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}) = 0,\ H\left(\exp\left(\mathrm{j}\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = H\left(\exp\left(-\mathrm{j}\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^* = H\left(\exp\left(\mathrm{j}\dfrac{9\pi}{4}\right)\right) \approx 0{,}65\mathrm{e}^{\mathrm{j}1{,}22}$

3. (а)



(б) $\Omega_0 \in \left\{\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}\right\}$

(в)