1. Каузални систем је описан диференцном једначином $\nabla(\Delta-2)^2 y[n] = \mathrm{D}x[n-1]$, где су D, ∇ и Δ оператори кашњења, диференце уназад и диференце унапред респективно. Одредити (а) импулсни одзив тога система и испитати (б) његову стабилност. Одредити његов сопствени одзив ако су за систем без побуде дати почетни (помоћни) услови $y[0] = y[2] = 0$, $y[1] = 1$;

nabla

$$\nabla(\Delta-2)^2\, y[n] = \mathrm{D}\,x[n-1] \;\Big|\; E \quad\Rightarrow\quad P(E)\, y[n] = x[n]$$

$$E\nabla(\Delta-2)^2\, y[n] = \cancel{E\mathrm{D}}\,x[n-1]; \qquad \nabla = 1-\mathrm{D} = 1-E^{-1}, \quad \Delta = E-1$$

$$E(1-E^{-1})(E-1-2)^2 \qquad (E^3-7E^2+15E-9)\,y_1[n] = x[n], \qquad x[n]=\delta[n]$$

$$y[n+3]-7y[n+2]+15y[n+1]-9y[n] = x[n] \quad \Big|\cdot \mathrm{D}^3$$

$$y_2[n]-7y_2[n-1]+15y_2[n-2]-9y_2[n-3] = x[n-3]$$

$$h_2[n]-7h_2[n-1]+15h_2[n-2]-9h_2[n-3] = \delta[n] \;\rightarrow\; h[n] = h_2[n-4]$$

$h_2[n<0] = 0$, $n=0$: $h_2[0] = \delta[0] = 1 \quad \boxed{h_2[0]=1}$

$\boxed{n=1}$: $h_2[1] - 7h_2[0] = 0 \Rightarrow \boxed{h_2[1]=7}$

$n=2$: $h_2[2] - 7h_2[1] + 15h_2[0] = 0$; $h_2[2] = 7h_2[1] - 15h_2[0]$; $\boxed{h_2[2]=34}$

$P(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 1;\ \lambda_{2,3} = 3$

$$h[n] = C_1 1^n + C_2 3^n + C_3\, n 3^n = C_1 + (C_2 + C_3 n)3^n$$

(а)

$$h_2[n] = \left[\frac14 + \left(\frac34 + \frac32 n\right)3^n\right]u[n] \Rightarrow \boxed{h[n] = \left(\frac14 + \left(\frac34 + \frac32(n-4)\right)\cdot 3^{n-4}\right) u[n-4]}$$

(б) $|\lambda| < 1$, $|\lambda_{2,3} = 3| > 1 \Rightarrow$ Систем није стабилан!

(в) ...

2. Дискретни систем описан је диференцном једначином:

$$2y[n] + 11y[n-1] + 17y[n-2] + 6y[n-3] = 2x[n] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k-1]\delta[k-1]$$

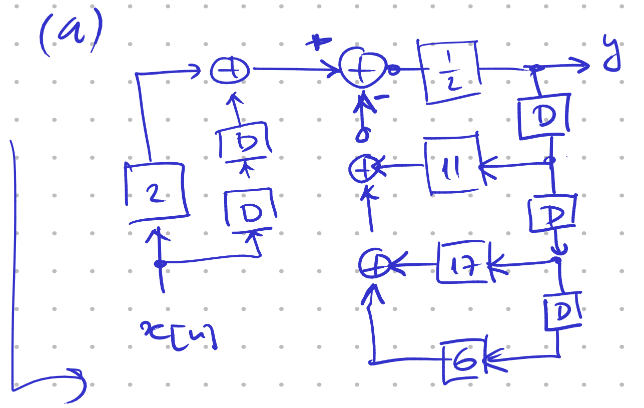
Нацртати (а) блок дијаграм система користећи суматоре, појачаваче и елементе за кашњење. Одредити (б) импулсни одзив система ако је познато да је он каузалан и да карактеристични полином има један корен који је $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. (в) Испитати стабилност система.

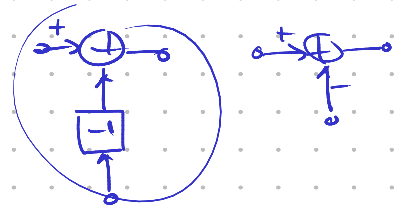
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k-1]\delta[k-1] = x[n-2], \quad k=1$$

$$y[n] = \left(2x[n] + x[n-2] - 11y[n-1] - 17y[n-2] - 6y[n-3]\right)\frac12$$

$$-\left(11y[n-1] + 17y[n-2] + 6y[n-3]\right)$$

(a)





(б) h!

$$h[n]=2h_1[n]+h_1[n-2]$$

$$2y[n]+11y[n-1]+17y[n-2]+6y[n-3]=2x[n]+x[n-2]$$

$$2y_1[n]+11y_1[n-1]+17y_1[n-2]+6y_1[n-3]=x[n]\to h_1[n]$$

$$P(\lambda)=2\lambda^3+11\lambda^2+17\lambda+6 \qquad \lambda_1=-\frac{1}{2} \qquad :\left(\lambda-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
	2	11	17	6
$-\frac{1}{2}$	2	10	12	0

$$P(\lambda)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(2\lambda^2+10\lambda+12\right)$$

$$\boxed{\lambda_1=-\frac{1}{2}}, \quad \boxed{\lambda_2=-3}, \quad \boxed{\lambda_3=-2}$$

(1) $|\lambda_{2,3}|>1 \Rightarrow$ Систем није стабилан!

$$h_1[n]=C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n+C_2(-3)^n+C_3(-2)^n$$

$$2h_1[n]+11h_1[n-1]+17h_1[n-2]+6h_1[n-3]=\delta[n]$$

$n=0 \Rightarrow 2h_1[0]=\delta[0]=1 \Rightarrow \boxed{h_1[0]=\frac{1}{2}}$ ✓

$n=1 \Rightarrow 2h_1[1]+11h_1[0]=\delta[1]=0 \Rightarrow \boxed{h_1[1]}=\frac{1}{2}\left(-\frac{11}{2}\right)=-\frac{11}{4}$ ✓

$n=2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{h_1[2]}=87/8$

$$\Rightarrow \quad h_1[n]=\left(-\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{9}{5}(-3)^n+\frac{1}{30}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\mathrm{u}[n] \qquad h[n]=2h[n]+h[n-2],$$

3. Дискретни систем описан је диференцном једначином $2y[n+2]-y[n+1]-y[n]=x[n]$. Одредити (а) импулсни одзив овог система Одредити (б) одзив на побуду и (в) сопствени одзив одзив система ако су дати побуда и помоћни услови:

(*i*) $x[n]=(-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n]$, $y[1]=1$, $y[0]=0$

(*ii*) $x[n]=(-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n-3]$, $y[1]=1$, $y[0]=0$

(*iii*) $x[n]=(-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n]$, $y[0]=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} y[n]=4$

$$P(\lambda)=2\lambda^2-\lambda-1, \qquad \lambda_1=-\frac{1}{2}, \quad \lambda_2=1 \Rightarrow h_1[n]=C_1 1^n+C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$h_1[n]=C_1+C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2y[n]-y[n-1]-y[n-2]=x[n-2] \Rightarrow h[n]=h_1[n-2]$$

$2y_1[n] - y_1[n-1] - y_1[n-2] = x[n] \longrightarrow h_1[n]$

$h_1[n] = \left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\right)u[n] \Rightarrow$ $h[n] = \left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{u}[n-2]$

$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$; $y_p[n] = x[n] * h[n] = x[n] * h_1[n-2] =$

$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, h[n-m]$ $= D^2\left(\underbrace{x[n] * h_1[n]}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^n u[n] * b^n u[n] = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\, u[n] \\ a^n u[n] * a^n u[n] = (n+1)\, a^n u[n] \end{array}}$$

$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right) * \left(\left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\right)u[n]\right) =$

$= 4\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right) + \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 1^n u[n]\right) =$

$= 4\,(\underbrace{n+1}_{n-2})\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \dots$

$$y_p^{(i)}[n] = \left[4(n \cancel{+} 1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{2}{9}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right]\underbrace{\mathrm{u}[n-2]}_{n<2}, \longleftarrow$$

$y_s^{(i)}[n] = c_1' + c_2'\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $\left\{\begin{array}{l} y_s^{(i)}[0] = 0 \\ y_s^{(i)}[1] = 1 \end{array}\right.$ $y_s^{(i)}[n] = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)u[n]$

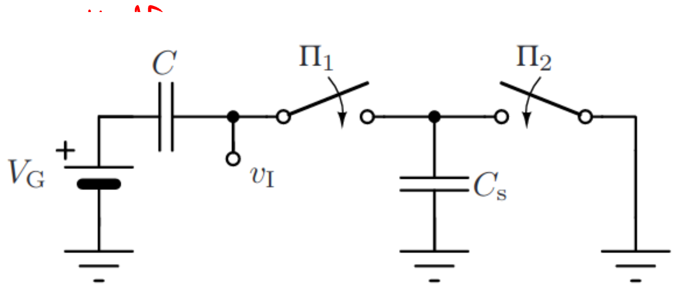
(ii) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3+3} u[n-3] = -\frac{1}{8}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} u[n-3]}_{x^{(i)}[n-3]}$ $\Rightarrow$ $y_p^{(ii)}[n] = -\frac{1}{8}\, y_p^{(i)}[n-3]$

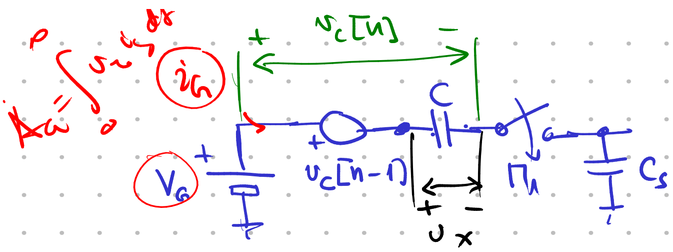
$y_s^{(ii)}[n] = y_s^{(i)}[n]$

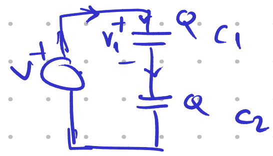
(viii) $y_p^{(iii)}[n] = y_p^{(i)}[n]$ $\Rightarrow$ $y_s^{(iii)}[n] = \left(4 + \cancel{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)u[n]$

$y_s(n \to \infty) = 4 \Rightarrow c_1'' = 4$

5. У колу са слике познато је $C = 100\,\mathrm{pF}$ и $C_s = 30\,\mathrm{pF}$ а емс идеалног напонског генератора константне побуде је $V_G = 1\,\mathrm{V}$. У тренутку $t_0 = 0^-$ оба кондензатора су неоптерећена. Прекидачи су идеални и затварају се искључиво у појединим тренуцима, *краткотрајно*. Прекидач Π_1 се укључује у тренуцима $t = kT$, а Π_2 у тренуцима $t = \left(k + \frac{1}{2}\right)T$, где су $\frac{1}{T} = f = 10\,\mathrm{MHz}$ а $k \in \mathbb{N}_0$. Одредити (а) диференцну једначину за дискретни представник напона на кондензатору, као $v_C^*[k] = v_C\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)T\right)$ и (б) решити је. Скицирати (в) дијаграм напона на кондензатору. На основу резултата из претходне тачке, одредити и (г) дискретни представник излазног напона $v_I^*[k] = v_I\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)T\right)$ и (д) скицирати његов дијаграм.







$$\boxed{V_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2}V}$$

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = V$$

$$Q = \frac{V}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$$

$$\alpha \triangleq \frac{C_s}{C+C_s}$$

$$v_x = \frac{C_s}{C+C_s}\left(V_G - v_C[n-1]\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = \alpha V_G - \alpha v_C[n-1]$$

$$v_C[n] = \underbrace{v_C[n-1]} + \alpha V_G - \underbrace{\alpha v_C[n-1]}$$

$$V_1 = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}V$$

$$v_C[n] - (1-\alpha)v_C[n-1] = \alpha V_G u[n]$$

$$P(\lambda) = \lambda - (1-\alpha), \quad \lambda_0 = 1-\alpha$$

$$v_C[n] = K(1-\alpha)^n + V_G$$

$$C a^n \xrightarrow{y_p} \frac{C a^n}{P(a)}$$

$$\alpha V_G \cdot 1^n \xrightarrow{y_p} \frac{\cancel{\alpha} V_G 1^n}{\cancel{P(1)}} \qquad P(1) = 1 - 1 + \alpha = \alpha$$

$$v_C[n] = v_C[n-1] = V_C$$

$$V_C - (1-\alpha)V_C = \alpha V_G \Rightarrow$$

$$\alpha V_C = \alpha V_G \Rightarrow \boxed{V_C = V_G}$$

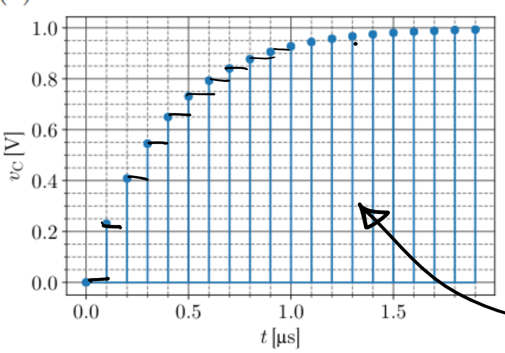
$$v_C[n] = K(1-\alpha)^n + V_G$$

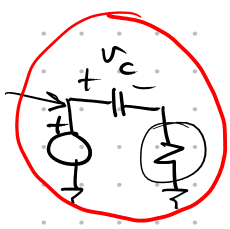
$$v_C[0] = 0 \Rightarrow K + V_G = 0 \Rightarrow \boxed{K = -V_G} \Rightarrow \boxed{v_C[n] = V_G\left[1 - (1-\alpha)^n\right] u[n]}$$

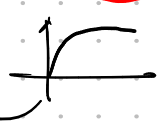
(а) $v_C[n] - \frac{C}{C+C_s} v_C[n-1] = \frac{C_s}{C+C_s} V_G$

(б) $v_C[n] = V_G\left[1 - \left(\frac{C}{C+C_s}\right)^n\right] \mathrm{u}[n]$

(в)

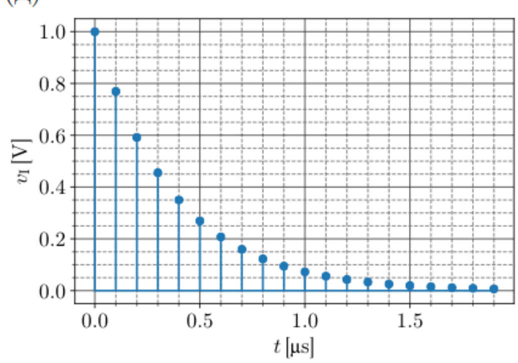


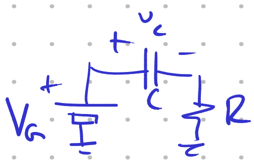




(г) $v_I[n] = V_G\left(\frac{C}{C+C_s}\right)^n \mathrm{u}[n]$

(д)





$$v_c = V_G\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \tau = RC$$

$$t = nT \Rightarrow n = \frac{t}{T}$$

$$v_c[n] = V_G\left(1 - \underbrace{\left(\frac{C}{C+C_s}\right)^{n}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \left(\frac{C}{C+C_s}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{\ln\left(\frac{C}{C+C_s}\right)\frac{t}{T}}$$

$$\boxed{-\frac{1}{RC} = \frac{\ln\frac{C}{C+C_s}}{T}} \quad R \qquad C_s = C\left(e^{\frac{T}{RC}} - 1\right)$$

$$\boxed{T \ll RC} \qquad e^{\frac{T}{RC}} \simeq 1 + \frac{T}{RC} \Rightarrow \boxed{C_s} \simeq C\left(\cancel{1} + \frac{T}{RC} - \cancel{1}\right) \overset{!}{=} \boxed{\frac{T}{R}}$$

$$R = \frac{T}{C_s} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{f C_s}}$$