**1.** Нацртати следеће дискретне сигнале $x = x[n]$:

(а) $x[n] = \mathrm{u}[n] - 2\mathrm{u}[n-4]$, и $y[n] = x[n] - x[n-1]$;

(б) $n^2(\delta[n+2] - 2\delta[n-2])$, и $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

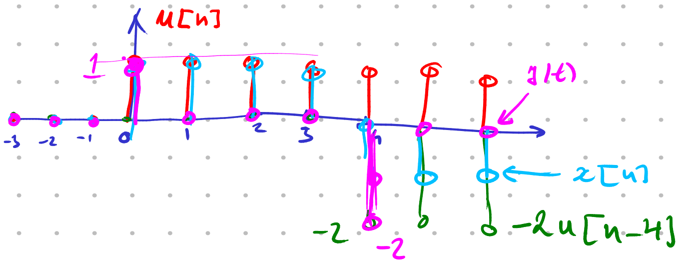
(в) $x[n] = (1-n)(\mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n-3])$

(г) $x[n] = \cos\frac{\pi n}{N}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\right)\mathrm{u}[n]$, за $N = 3$;

где су $\mathrm{u}[n]$ и $\delta[n]$ дискретни јединични низ и дискретни јединични импулс редом.

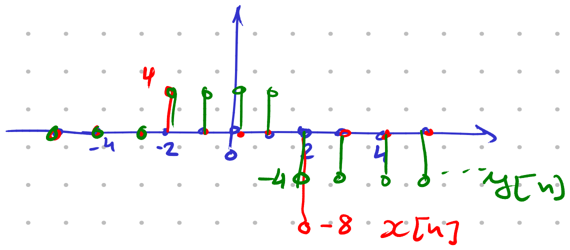
$u(t)$ $\delta(t)$

(а) $x[n] = u[n] - 2u[n-4]$




(б) $x[n] = n^2(\underbrace{\delta[n+2]}_{n=-2} - 2\underbrace{\delta[n-2]}_{n=2})$ $\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

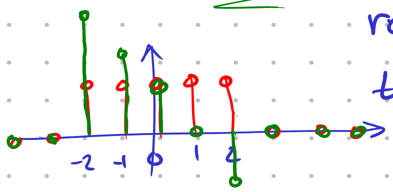
$(-2)^2 = 4 \qquad 2^2 = 4$




(в) $x[n] = (1-n)(u[n+2] - u[n-3])$

rect[n]

~~tri[n]~~

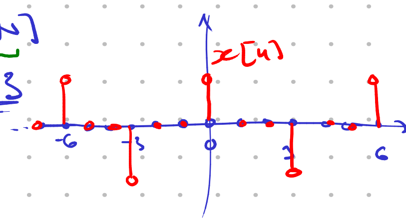


(г) $x[n] = \cos\frac{\pi n}{N}\left(\sum_{(k)-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\right)u[n]$

$= \sum_{(k)-\infty}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{N}\,\delta[n-kN]$

$n = k\cdot 3$

$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos k\pi$



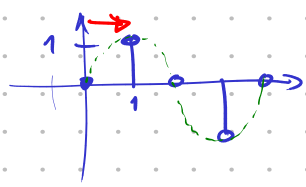

**2.** Реална дискретна синусоида дефинисана је у облику $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$, где је $A \geq 0$, $|\Omega_0| \leq \pi$ и $|\phi| < \pi$. Ако дата секвенца

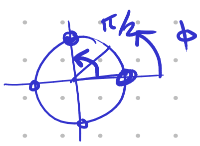
(а) $\{0,1,0,-1\}$; $N=4$ (б) $\{0,1,1,0,-1,-1\}$; (в) $\{1,0,-1,\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$

Домаћи

представља основни период ове синусоиде, при чему је први члан $x[0]$, одредити параметре $A$, $\Omega_0$ и $\phi$.

(а)





$x[0] = A\cos(\phi) = 0$

$\cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}$

$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\Omega_0 = \frac{\pi}{2}}$

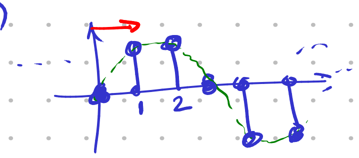
$x[1] = 1 = A\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1}$

$A\cos(\Omega_0 n + \phi) = A\cos(\Omega_0(n + \overset{\text{период}}{N}) + \phi)$

$\Rightarrow \Omega_0 N = 2k\pi \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}k$

$\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}}$

(б)



$\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{3}}$

$x[0] = 0 \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}$

$\cos(\Omega_0 + \phi) = \cos(2\Omega_0 + \phi)$

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \phi\right)}$

$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{2}}$

$\phi = \pm\frac{\pi}{2}$

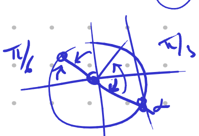
$x[1] = 1 = A\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = A\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{\sqrt{3}}}$

$\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{3} + \phi}_{\alpha}\right) = \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{3} + \phi}_{\alpha + \frac{\pi}{3}}\right)$

!




$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\phi = \frac{\pi}{2}}$

$\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\phi = -\frac{\pi}{2}}$

**3.**[1] За следеће системе испитати да ли су стабилни у *BIBO* смислу, линеарни, временски инваријантни, са меморијом и каузални:

(а) $y[n] = \sum_{k=N_0}^{n} x[k]$,

(б) $y[n] = \sqrt{2}x[n]$,

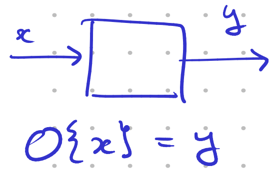
(в) $y[n] = nx[n-1]^2$,

(г) $y[n] = \int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

(д) $y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}t}$,

(ђ) $y(t) = te^{x(t)-t}$,

где је $N_0$ позната константа.




$O\{x\} = y$

(I) Стабилност: (BIBO - Bounded in - Bounded out)

$(\forall t)\, |x(t)| < B_x \Rightarrow (\exists B_y)(|y(t)| < B_y)$

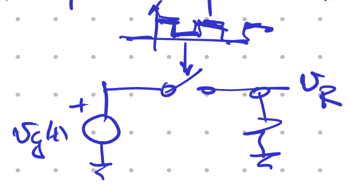
адитивност

(II) Линеарност: $O\{a x_1(t) + b x_2(t)\} = O\{a x_1(t)\} + O\{b x_2(t)\} =$

хомогеност

$= aO\{x_1(t)\} + b\, O\{x_2(t)\} \Rightarrow$ Лин.

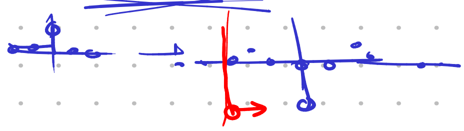
(III) Вр. инваријантност $O\{x(t)\} = y(t) \Rightarrow O\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$




(IV) Меморија $\Rightarrow$ $\underbrace{W_e \;\&\; W_m}_{CA}$

(V) $y(t)$ зависи од $x(t-\tau)$, $\tau \geq 0$

Каузалност!



| | C | Л | ВИ | М | К |
|---|---|---|---|---|---|
| (а) | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ |
| (б) | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ |
| (в) | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ |
| (г) | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ |
| (д) | ✗ | ✓ | ✓ | ? | ✗ |

(а) $y[n] = \sum_{k=N_0}^{n} x[n]$

$x[n] = u[n-N_0]$

(б) $y[n] = \sqrt{2} \cdot x[n]$

(в) $y[n] = n\, x[n-1]^2 = n,\ n \geq 1$

$u[n]$

(г) $y[n] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\, d\tau$

$x(\tau) = \sin(\tau)$

(д) $y(t) = \frac{dx(t+1)}{dt}$ $\quad x(t) = u(t)$

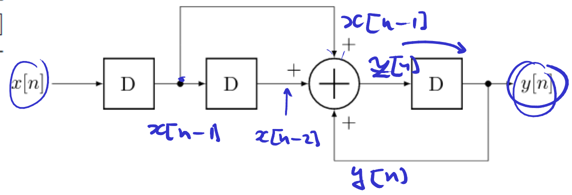
$y(t) = \delta(t+1)$

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ $\quad U_x$, $C_x$

(т) $y(t) = t\, e^{x(t) - t} \sim t e^{-t} \to 0$

С ✓ Л ✗ Ву ✗ М ✗ К ✓

**4.**[2] У систему са слике употребљени су блокови за кашњење и суматори. Улаз система је дискретан сигнал $x = x[n]$ а излаз је дискретан сигнал $y = y[n]$. Описати систем одговарајућом диференцном везом.



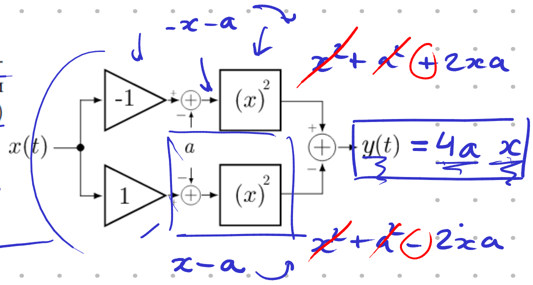

$x[n] \xrightarrow{n \mapsto n-1} x[n-1]$

$z[n] = x[n-1] + x[n-2] + y[n] \Rightarrow y[n] = z[n-1] = x[n-2] + x[n-3] + y[n-1]$

$\Rightarrow \boxed{y[n] - y[n-1] = x[n-2] + x[n-3]}$

**5.** У систему са слике употребљени су идеални појачавачи сигнала, суматори и блокови за квадрирање, а $a$ је позната реална константа. Одредити (а) везу између излаза и улаза система. Испитати да ли је тај систем (б) линеаран, (в) са меморијом и (г) стабилан у *BIBO* смислу.

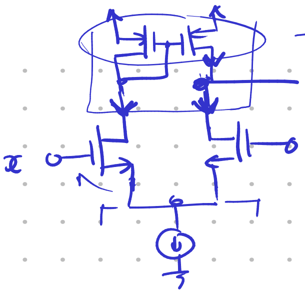
✓ ✗ ✓

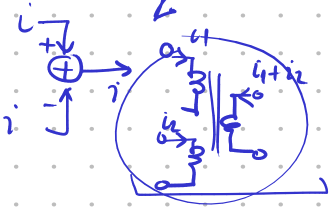



$\cancel{x^2} + \cancel{a^2} + 2xa$

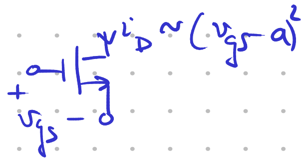
$y(t) = 4a\, x$

$\cancel{x^2} + \cancel{a^2} - 2xa$

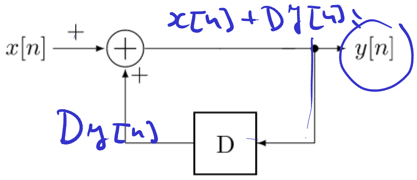




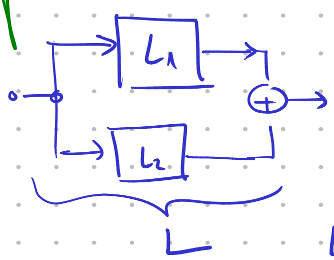
$y = (x-a)^2 \Rightarrow$



**6.** У систему са слике употребљен је идеалан блок за кашњење. Одредити (а) *оператор* овог система L. Развити добијени оператор у (б) потенцијални ред по оператору кашњења $L = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$. Одредити (в) који елементаран систем представља добијени ред.

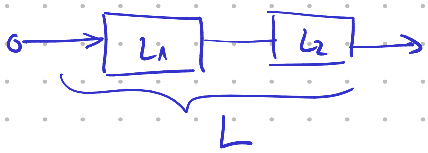



$y[n] = \bigcirc\, x[n]$



$y = L_1 x + L_2 x$

$\boxed{y = \underbrace{(L_1 + L_2)}_{L} x}$



$L = L_2 L_1 x$

$\boxed{L = (L_2 L_1) x}$

$L_1 \cdot (L_2 + L_3) = L_1 L_2 + L_1 L_3$ ✓

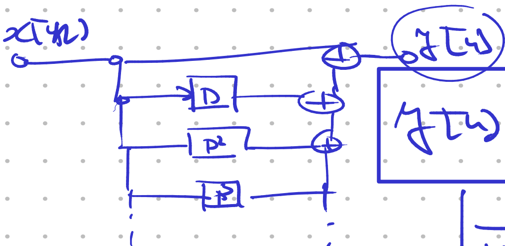
$x[n] + Dy[n] = y[n] \Rightarrow x[n] = (1-D) y[n] \Rightarrow \boxed{y[n] = \frac{1}{1-D} x[n]}$

$\frac{1}{1-D} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = 1 + D + D^2 + D^3 + \dots$

$\boxed{c_k = 1}$

$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots}$

$y[n] = (1 + D + D^2 + \dots) \cdot x[n]$




$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]}$

$\boxed{\frac{1}{1-D} = \sum}$

**7.**[3] Одредити изразе за операторе диференце унапред $\Delta$ и диференце уназад $\nabla$ преко (а) оператора кашњења $\mathrm{D}$ и (б) оператора предикције $\mathrm{E}$. Полазећи од резултата из претходне тачке, користећи се Њутновом биномном формулом, извести (в) израз за оператор $k$-те диференце унапред, $\Delta^k$.

$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$

$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$

(а) $Dx[n] = x[n-1] \Rightarrow \boxed{D^{-1}x[n] = x[n+1]}$

$E \cdot D = 1 \Rightarrow E = \frac{1}{D}$

(б) $Ex[n] = x[n+1] \Rightarrow \boxed{E^{-1}x[n] = x[n-1]}$

(а) $\Delta x[n] = D^{-1}x[n] - x[n] = (D^{-1}-1)x[n]$

$\boxed{\Delta = D^{-1} - 1}$ $\quad \nabla x[n] = x[n] - Dx[n] \Rightarrow \boxed{\nabla = 1 - D}$

(б) $\boxed{\Delta = E - 1}$ $\quad \boxed{\nabla = 1 - E^{-1}}$

(в) $\Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1}) = (E-1)^k = \sum_{n=0}^{k} E^n \cdot (-1)^{k-n} \cdot \binom{k}{n}$

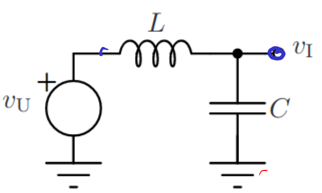
**8.** Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + \cancel{a_nx^n}$ $a_Kx^K$ познати полином. Ако је $\mathrm{E}$ оператор предикције, (а) упростити дискретан сигнал $y[n] = P(\mathrm{E})C\lambda^n$, где су $C$ и $\lambda$ познате реалне консатнте. На основу добијеног резултата, (б) одредити једно партикуларно решење нехомогене диференцне једначине $P(E)y[n] = x[n]$, где је побуда облика $x[n] = Ca^n$ при чему је $P(a) \neq 0$.

$y[n] = \boxed{P(E)} \cdot C\lambda^n = (a_0 + a_1E + \cdots + a_KE^K) \cdot C\lambda^n = a_0C\lambda^n + a_1C\lambda^n \cdot \lambda + a_2C\lambda^n\lambda^2 + \cdots + a_KC\lambda^n\lambda^K = P(\lambda) \cdot C\lambda^n$ !

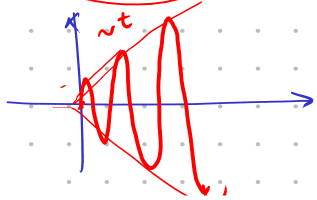
(б) $P(E)\, y[n] = x[n]$, $\quad x[n] = Ca^n \quad x[n] = \boxed{K} \cdot Ca^n$

$$\boxed{y_p[n] = \frac{Ca^n}{P(a)}} \qquad \boxed{K = 1/P(a)}$$

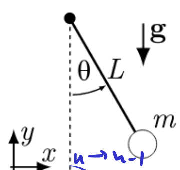
**9.** У колу са слике познати су $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_\mathrm{U} = v_\mathrm{U}(t)$ а излаз напон у колу $v_\mathrm{I} = v_\mathrm{I}(t)$. Одредити (а) диференцијалну једначину која описује овај систем. Испитати (б) стабилност овог система у *BIBO* смислу.




$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$




**10.** Механички систем са слике, који представља математичко клатно које се састоји од мале кугле масе $m$ обешене о крут лак танак штап дужине $L = 10\,\mathrm{cm}$, постављен је у хомогено гравитационо поље убрзања $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{i}_y$, где је $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Написати диференцијалну једначину која описује одзив овог система $\theta = \theta(t)$. У почетном тренутку $t_0 = 0$ је $\theta(t_0) = \frac{2\pi}{3}$ а клатно креће из мировања. Трансформацијом извода у његов дискретни еквивалент према апроксимативном пресликавању $\frac{d}{dt}$ $\mathrm{D} \approx \frac{x[n]-x[n-1]}{T_\mathrm{s}}$, где је $T_\mathrm{s}$ периода одабирања, одредити одговарајући дискретан систем. Написати програм у програмском пакету по избору који решава добијену нелинеарну диференцну једначину. Нацртати дијаграм $\theta = \theta(t)$ за првих $T = 2\,\mathrm{s}$ кретања. Евентуално, преклопити аналитичко решење добијено решавањем уз апроксимацију малог угла $\sin\theta \approx \theta$. Како може да се провери да ли је одабран добар период одабирања $T_\mathrm{s}$?




$n \to n-1$ $\quad \left(\frac{1-D}{T_s}\right)^2$

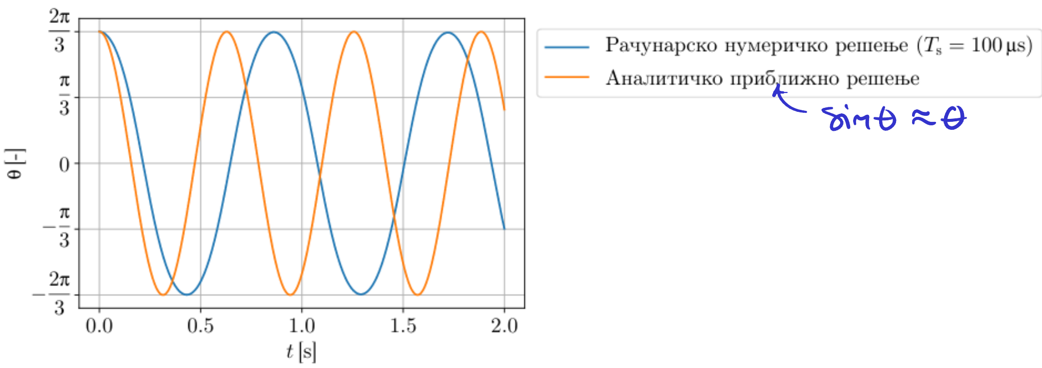
(а) $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, где је $\omega_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$

$D^2\theta + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

(б) $\theta[n] + \omega_0^2 \sin(\theta[n]) = 2\theta[n-1] - \theta[n-2]$.

$\theta[0] = \theta[-1] = 2\pi/3$

$\theta[1] \to \theta[2]$




$\sin\theta \approx \theta$