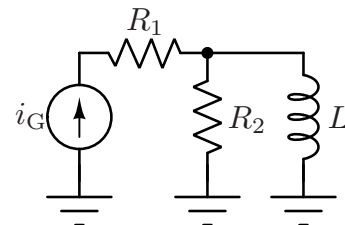


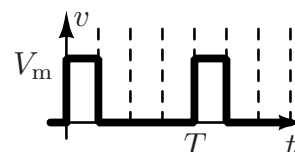
6 Фуријеови редови континуалног сигнала

Увод и основни појмови.

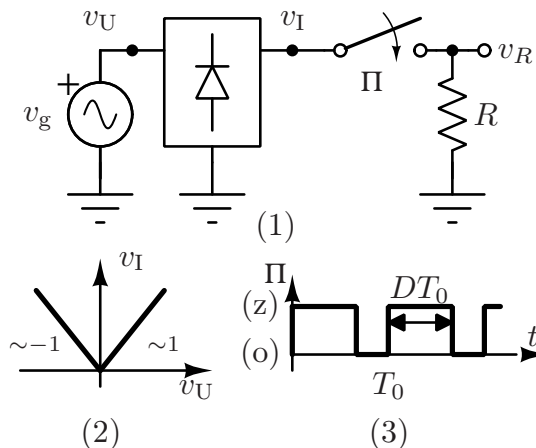
1. (Јун 2021.) Дат је континуалан сигнал $x(t) = 1 - 2 \sin(\omega_0 t) + 3 \cos(\omega_0 t) - 4 \cos(4\omega_0 t)$, где је ω_0 непозната константа. Израчунати коефицијенте развоја тог сигнала у (а) тригонометријски и (б) комплексни Фуријеов ред. У колу са слике познато је $R_1 = 10R_2 = 5 \text{ k}\Omega$, $L \rightarrow \infty$, а струја струјног генератора је $i_G = 1 \text{ mA} \cdot x(t)$, где је $x(t)$ сигнал дефинисан у претходним тачкама. (в) Израчунати ефективне вредности напона на отпорницима V_{R_1} и V_{R_2} .



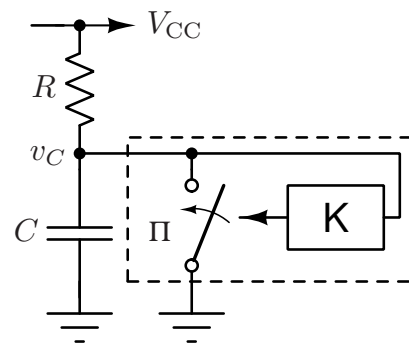
2. Дат је напонски сигнал $v = v(t)$ облика периодичне поворке униполарних правоугаоних импулса амплитуде $V_m = 5 \text{ V}$, као на слици. Фактор испуњености импулса је $D = 25\%$ а учестаност је $f = 1 \text{ kHz}$. Одредити развој овог сигнала у комплексан Фуријеов ред, $V[k]$, на основном периоду T .



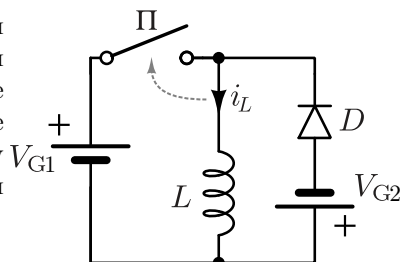
3. У колу са слике (1) познат је напон побудног генератора $v_g = V_m \sin(\omega t)$ где су $V_m = 12 \text{ V}$ и $\omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, а прекидач је идеалан. Преносна карактеристика нелинеарног кола са диодом приказана је на слици (2). Прекидач се управља као што је приказано на слици (3) при чему је фактор испуне $0 < D < 1$ а T_0 је основни период напона v_I . Скицирати (а) напоне у тачкама v_U , v_I и v_R . Одредити (б) спектралне коефицијенте напона v_R , $V_R[k]$.



4. У колу са слике познато је $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ и напон напајања $V_{CC} = 5 \text{ V}$. Систем „К“ управља идеалним прекидачем П на основу напона v_C . Прекидач П је иначе отворен, уколико напон v_C достигне вредност mV_{CC} , где је $0 \leq m \leq 1$ позната константа, контролни систем „К“ тренутно и краткотрајно затвара прекидач. У почетном тренутку је $v_C(0) = 0$. Одредити (а) напон на кондензатору у зависности од времена и (б) одредити спектралне коефицијенте устаљене периодичне компоненте тог напона на основном периоду.



5. У колу са слике познато је $L = 100 \mu\text{H}$ и $V_{G1} = V_{G2} = 10 \text{ V}$. Диода и прекидач су идеални. Прекидач се управља на основу тренутне вредности струје калема. Када струја калема достигне нулту вредност прекидач се затвара, а када струја калема достигне вредност $I_0 = 1 \text{ A}$ прекидач се отвара. У колу је успостављен периодичан режим. Одредити (а) струју калема $i_L = i_L(t)$ и (б) скицирати њен дијаграм. Одредити (в) амплитудски спектар $|I_L[k]|$.



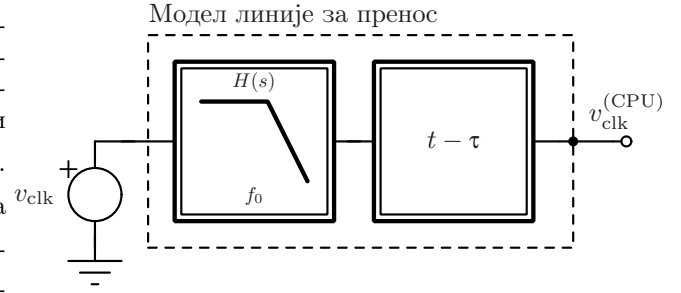
Особине Фуријеовог реда континуалног сигнала

6. (Окшобар 2021.) На слици 1 је представљена принципска шема система за генерисање и довођење сигнала такта до одговарајућег прикључка дигиталног процесора. Генератор такта је идеалан напонски генератор симетричне униполарне поворке правоугаоних импулса учестаности $f_{\text{clk}} = \frac{1}{T_{\text{clk}}} = 4 \text{ MHz}$ и амплитуде $V_m = 5 \text{ V}$, као на слици 2. Линија за пренос такта моделује се као каскадна веза идеалног блока за кашњење, кашњења $\tau = \frac{1}{16} \mu\text{s}$, и идеалног филтра пропусника ниских учестаности, чија је фреквенцијска преносна карактеристика $H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$, где је ω_0 непознати параметар. Према спецификацији употребљеног процесора, при преласку напона такта са ниског на високи ниво, дозвољено је да у прелазној зони између $V_1 = 1,5 \text{ V}$ и $V_2 = 3,5 \text{ V}$, доведени сигнал такта проведе највише $\Delta t_{\text{max}} = 5 \text{ ns}$, као што је илустровано на слици 3. Одредити развоје генерисаног сигнала такта, $v_{\text{clk}}(t)$, и сигнала такта на улазу у процесор $v_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}(t)$ у (а) тригонометријски и (б) комплексан Фуријеов ред, у зависности од непознатог параметра ω_0 . Нулти тренутак временске осе, t_0 , поклапа се са тренутком успонске ивице генерисаног напонског сигнала такта. Одредити коефицијенте развоја сигнала $\frac{dv_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}(t)}{dt}$ у (в) тригонометријски Фуријеов ред. Користећи се резултатом из претходне тачке, (г) израчунати параметар ω_0 , тако да буде задовољена наведена спецификација процесора.

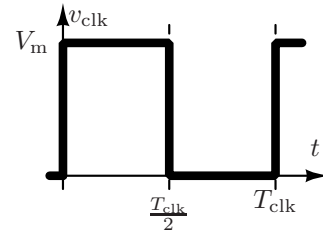
Напомена. Приликом прорачуна времена које сигнал такта проводи у прелазној зони, претпоставити да је нагиб сигнала такта, $\frac{dv_{\text{clk}}^{(\text{CPU})}(t)}{dt}$ практично константан у прелазној зони.

Формални развој.

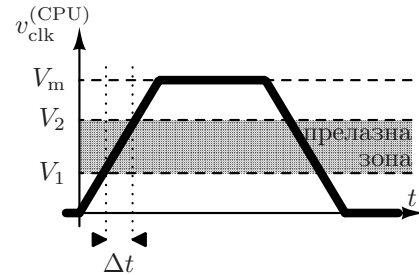
7. У колу са слике познато је R и C а операциони појачавач је идеалан. Побудни напонски генератор је идеалан, а позната је и његова емс $v_G = \frac{\alpha \sin(\omega t) V_m}{1 - 2\alpha \cos(\omega t) + \alpha^2}$, где су V_m и α познате константе, при чему је $|\alpha| < 1$. Одредити спектралне коефицијенте излазног напона $V_I[k]$ у комплексном облику.



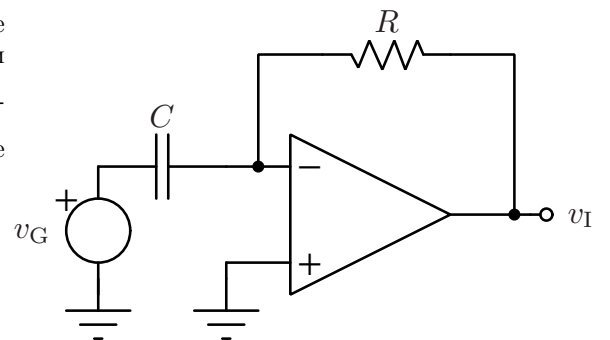
Слика 1.



Слика 2



Слика 3

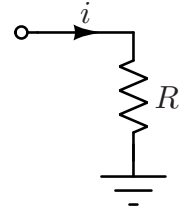


Парсевалова теорема.

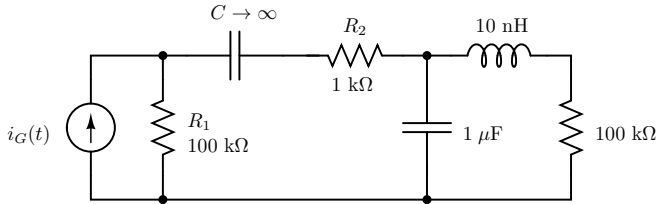
8.¹ У мрежи са слике позната је отпорност отпорника $R = 3 \text{ k}\Omega$ и струја

$$i = \frac{0,75 I_0}{1,25 - \cos(\omega t)},$$

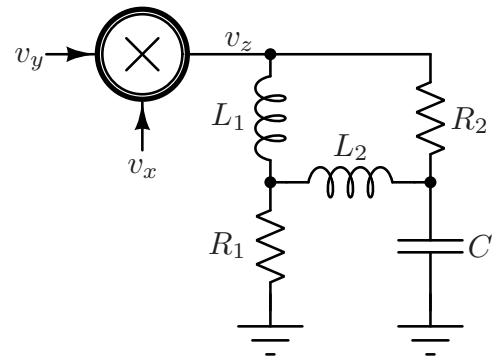
где су $I_0 = 1 \text{ mA}$ и $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Израчунати средњу снагу губитака на отпорнику R .



9.² У колу са слике позната је струја струјног генератора у дата облику $i_G(t) = I_m(1 + \cos(\omega_0 t) \sin^2(\omega_0 t))$, где су $I_m = 1 \text{ mA}$ и $\omega_0 = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Одредити развој струје i_G у Фуријеов ред на основном периоду. Израчунати средње снаге отпорника (б) R_1 и (в) R_2 . У колу је успостављен сложенепериодичан режим.



10.³ У колу са слике познато је $L_1 = L_2 \rightarrow \infty$, $R_1 = 2R_2 = 100 \Omega$ и $C \rightarrow \infty$. Употребљен је идеални множач (тзв. мешач), нелинеаран систем без меморије са два улаза и једим излазом, чија је карактеристика преноса одређена изразом $v_z = \frac{v_x \cdot v_y}{V_0}$, где је $V_0 = 1 \text{ V}$. Познати су спектри улазних напона $V_x[k] = V_0(u[k+2] - u[k-3])$ и $V_y = V_0(\delta[k+2] + \delta[k-2])$ чији су основни периоди једнаки. Израчунати средње снаге отпорника R_1 и R_2 .



¹ Видети и задатке 3.3 и 3.18 из референтне збирке задатака

² Видети и задатак 3.21. из референтне збирке задатака.

³ Видети и задатак 3.22. из референтне збирке задатака.

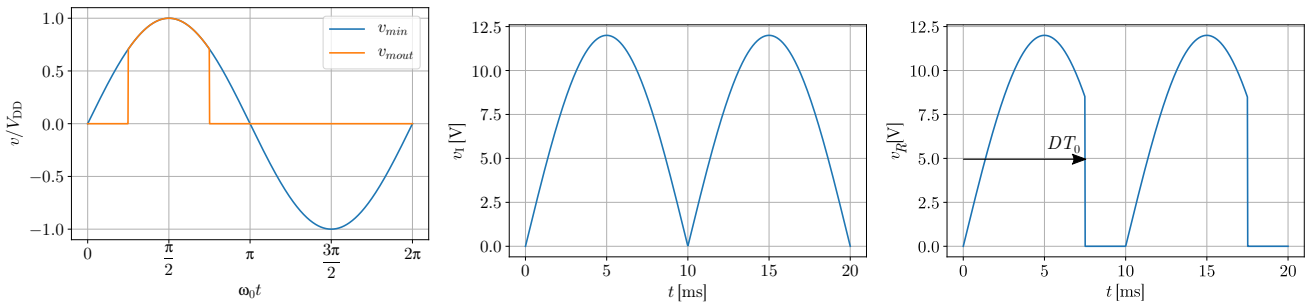
Решења

1. (a) $A[k] = \delta[k] + 3\delta[k-1] - 4\delta[k-4]$ (б) $X[k] = -2\delta[k+4] + \left(\frac{3-j^2}{2}\right)\delta[k+1] + \delta[k] + \left(\frac{3+j^2}{2}\right)\delta[k-1] - 2\delta[k-4]$
 $B[k] = -2\delta[k-1]$

(в) $V_{R_1} = 5\sqrt{\frac{31}{2}} \text{ V} \approx 19,7 \text{ V}$ $V_{R_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}} \text{ V} \approx 1,9 \text{ V}$

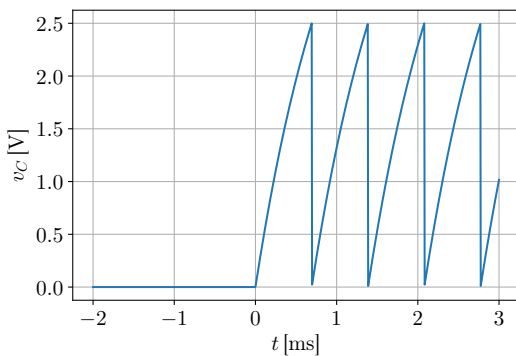
2. $V[k] = DV_m \text{ sinc}(kD)e^{-jk\pi D}$.

3. (a)



(б) $V_1[k] = \frac{(\cos(\pi D) + j2k \sin(\pi D))e^{-j2\pi k D} - 1}{\pi(4k^2 - 1)}$

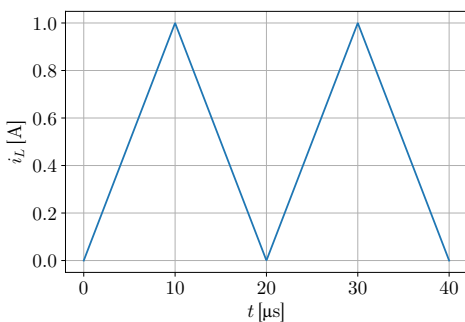
4. (a) Пример за $m = \frac{1}{2}$



(б) $V_C[k] = V_{CC} \left(\delta[k] - \frac{m}{j2\pi k - \ln(1-m)} \right)$

5. (a) Тражена струја је периодична са основним периодом $T_0 = 20 \mu\text{s}$ на ком је дефинисана као $i_L = 1 \text{ A tri}\left(\frac{2t}{T_0}\right)$

(б)



(B) $|I_L[k]| = \frac{1}{2} \text{A} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$.

7. $V_I[k] = \frac{1}{2} k \omega RC \alpha^k V_m \operatorname{sgn} k$.

8. $P_R = 5 \text{ mW}$

9. (a) $I_G[k] = I_m \left(\delta[k] - \frac{1}{8} (\delta[k-3] - \delta[k-1] - \delta[k+1] + \delta[k+3]) \right)$, (b) $P_{R1} \approx 100 \text{ mW}$, (c) $P_{R2} \approx \frac{1}{16} \text{ mW}$.

10. $P_{R1} = 40 \text{ mW}$, $P_{R2} = 160 \text{ mW}$.