11 $\mathcal{Z}$ трансформација

Задаци

1. Одредити дискретан сигнал $x[n]$ ако је дато $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$:

(i) $X(z) = \dfrac{z-1}{z^4}$ (ii) $X(z) = \dfrac{1}{(z-0{,}3)(z-0{,}7)}$ (iii) $X(z) = \dfrac{z^2-2{,}5z-1{,}5}{z^2+3z+2}$

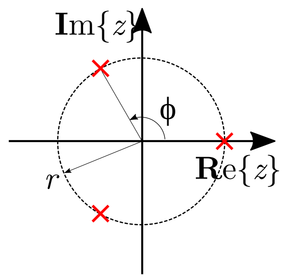
2.[1] Полазећи од резултата за $\mathcal{Z}$-трансформацију сигнала $u[n]$ одредити (а) $\mathcal{Z}$-трансформацију сигнала $x[n] = n^2\,\mathrm{u}[n]$. Полазећи од резултата претходне тачке, наћи (б) $\mathcal{Z}$-трансформацију сигнала $y[n] = n^2 a^n \mathrm{u}[n]$, ($|a| < 1$, $a \in \mathbb{R}$). Полазећи од добијеног наћи (в) $\mathcal{Z}$-трансформацију акумулације сигнала $y[n]$.

3.[2] Применом $\mathcal{Z}$ трансформације одредити сопствени одзив система описаног диференцном једначином

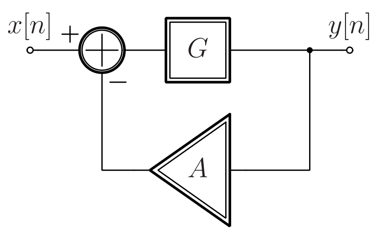
$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n],$$

где су x и y улаз и излаз тог система редом, а дати су помоћни услови $y[0] = y[1] = 1$.

4. Преносна карактеристика реалног дискретног филтра без нула функције преноса дата је половима у z-равни. Сви полови функције преноса се налазе на кружници полупречника $r = \dfrac{1}{2}$, један од полова је реалан, а потег другог заклапа са позитивним делом реалне осе угао $\phi = \dfrac{2\pi}{3}$, као на слици. Позната је још и минимална вредност амплитудске фреквенцијске карактеристике $|H(\mathrm{j}\Omega)|_{\min} = 1$. Одредити (а) функцију преноса филтра $H(z)$ и (б) скицирати амплитудску карактеристику у опсегу дискретних кружних учестаности $0 \leq \Omega \leq \pi$. Одредити (в) импулсни одзив датог филтра. Одредити (г) устаљени одзив овог филтра на побуду $x[n] = \cos(\pi n)\,\mathrm{u}[n]$



5. У блок дијаграму дискретног система са слике позната је преносна функција $G(z) = \dfrac{1}{z-2}$. Одредити појачање A идеалног појачавача тако да је дати систем представљен дијаграмом, $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$, асимптотски стабилан.



[1] Видети и задатак **5.5** из референтне збирке задатака.
[2] Видети и задатак **5.8** из референтне збирке задатака.

12 Део таблица за испит

Парови $\mathcal{Z}$ трансформације

$x[n]$	$\mathcal{Z}\{x[n]\}$
$\delta[n]$	1
$a^n \, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$
$n\, a^n \, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
$\dfrac{n\,(n+1)}{2}\, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z^2}{(z-1)^3}$
$\binom{n+k}{k} a^n \, \mathrm{u}[n]$	$\left(\dfrac{z}{z-a}\right)^{k+1}$
$\binom{n+m}{k} \mathrm{u}[n], \quad m \geq 0$	$\dfrac{z^{m+1}}{(z-1)^{k+1}}$
$(-1)^n \binom{m}{n} \mathrm{u}[n], \quad m \geq 0$	$\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{m}$
$a^n \, \cos[n\theta]\, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z\,(z - a\cos(\theta))}{z^2 - 2az\, \cos(\theta) + a^2}$
$a^n \, \sin[n\theta]\, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az\, \sin(\theta)}{z^2 - 2az\, \cos(\theta) + a^2}$
$a^n \, \cosh[n\theta]\, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z\,(z - a\cosh(\theta))}{z^2 - 2az\, \cosh(\theta) + a^2}$
$a^n \, \sinh[n\theta]\, \mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az\, \sinh(\theta)}{z^2 - 2az\, \cosh(\theta) + a^2}$

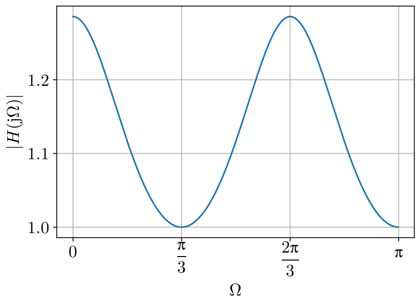
Решења

1. (*i*) $x[n] = \delta[n-3]+\delta[n-4]$ (*ii*) $x[n] = \frac{5}{2}\left((0{,}7)^{n-1}-(0{,}3)^{n-1}\right) \mathrm{u}[n-1]$ (*iii*) $x[n] = -\frac{3}{4}\delta[n]+\left(\frac{15}{4}(-2)^n - 2(-1)^n\right) \mathrm{u}[n]$

2. (а) $\mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$, (б) $\mathcal{Z}\{y[n]\} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$ (в) $\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n} y[n]\right\} = \frac{az^2(z+a)}{(z-1)(z-a)^3}$

3. $x_{\mathrm{s}}[n] = 2^{n+1} - 3^n,\ \ n \geq 0$

4. (а) $H(z) = \dfrac{\frac{9}{8}}{z^3 - \frac{1}{8}}$ (б)



(в) $h[n] = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{3}\right)\right) \mathrm{u}[\mathrm{n}-1]$ (г) $y[n] = -\cos(\pi n)$.

5. Треба да буде $1 < A < 3$.