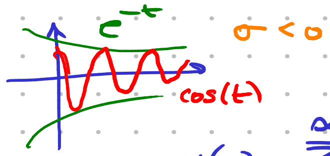
$\mathcal{L}: \; e^{st}, \; s = \boxed{\sigma} + j\omega \sim e^{\sigma t}\cos(\omega t) \qquad s = -1 + j$



$\sigma < 0$

$\mathcal{Z}: \; z^n, \; z = \boxed{\rho} e^{j\boxed{\phi}} \sim \rho^n \cos(\phi \cdot n) \qquad |\rho| < 1.$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

1. Одредити ~~дискретан~~ каузалан сигнал $x[n]$ ако је дато $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$:

(*i*) $X(z) = \dfrac{z-1}{z^4}$ $\leftarrow$ (*ii*) $X(z) = \dfrac{1}{(z-0{,}3)(z-0{,}7)}$ (*iii*) $X(z) = \dfrac{z^2 - 2{,}5z - 1{,}5}{z^2 + 3z + 2}$

$x[n] \leftrightarrow X(z)$

$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z)$

$x[n+1] \leftrightarrow z\,X(z)$.

$\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\mathcal{Z}\{x[n-p]\} = z^{-p}X(z)$, $p > 0$

(i) $X(z) = z^{-3} - z^{-4} \overset{z^{-1}}{\leftrightarrow} \boxed{x[n] = \delta[n-3] - \delta[n-4].}$

(ii) $X(z) = \dfrac{1}{(z-0{,}3)(z-0{,}7)} = \dfrac{\overset{-5/2}{A}}{z-0{,}3} + \dfrac{\overset{+5/2}{B}}{z-0{,}7}$

$$A = \frac{1}{z-0{,}7}\bigg|_{z-0{,}3=0} = \frac{1}{0{,}3-0{,}7} = \frac{1}{-0{,}4} = -\frac{5}{2}.$$

$$B = \frac{1}{z-0{,}3}\bigg|_{z-0{,}7=0} = \frac{1}{0{,}7-0{,}3} = +\frac{5}{2}$$

$$X(z) = \frac{5}{2}\left(\frac{z}{z-0{,}7} - \frac{z}{z-0{,}3}\right)z^{-1}$$

$a^n\,\mathrm{u}[n]$ | $\dfrac{z}{z-a}$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{5}{2}\left(0{,}7^{n-1}\,u[n-1] - 0{,}3^{n-1}\,u[n-1]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{5}{2}\left(0{,}7^{n-1} - 0{,}3^{n-1}\right)u[n-1].}$$

2.[1] Полазећи од резултата за $\mathcal{Z}$-трансформацију сигнала $\mathrm{u}[n]$ одредити (а) $\mathcal{Z}$-трансформацију сигнала $x[n] = n^2\,\mathrm{u}[n]$. Полазећи од резултата претходне тачке, наћи (б) $\mathcal{Z}$-трансформацију сигнала $y[n] = n^2 a^n \mathrm{u}[n]$, ($|a| < 1$, $a \in \mathbb{R}$). Полазећи од добијеног наћи (в) $\mathcal{Z}$-трансформацију акумулације сигнала $y[n]$.

$a^n\,\mathrm{u}[n] = u[n]$ | $\dfrac{z}{z-a}$

$a = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{z}{z-1}}$

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}.$$

$$\mathcal{Z}\{n\,x[n]\} = -z\,\frac{dX(z)}{dz}$$

$$\mathcal{Z}\{n\,u[n]\} = -z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

$$\mathcal{Z}\{n^2 u[n]\} = -z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad \text{(a)}$$

$$(б)\quad \mathcal{Z}\{a^n\, n^2 u[n]\} = \frac{\frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}+1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^3} \leftarrow Y(z).$$

$$\mathcal{Z}\{a^n\,x[n]\} = X\left(\tfrac{z}{a}\right),$$

$$\sum y[n] = \sum_{m=0}^{n} y[m];$$ Neka je $y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$, tada je $\mathcal{Z}\{y[n]\} = \frac{X(z)}{z-1}$.

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{n} y[m]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{n-1} y[m] + y[n]\right\} = \frac{Y(z)}{z-1} + Y(z)$$

$$\sum_{m=0}^{n} a^n n^2 u[n]$$

3.[2] Применом $\mathcal{Z}$ трансформације одредити сопствени одзив система описаног диференцном једначином

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = \cancel{x[n]}, \quad x = \emptyset$$

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n-2]$$

где су x и y улаз и излаз тог система редом, а дати су помоћни услови $y[0] = y[1] = 1$.

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = \emptyset \xrightarrow{\mathcal{Z}} \underbrace{z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] - 5(zY(z) - zy[0]) + 6Y(z) = \emptyset}_{Y(z)}$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = z\,\mathcal{Z}\{x[n]\} - z\,x[0]$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+p]\} = z^p\left(X(z) - \sum_{k=0}^{p-1} x[k]\, z^{-k}\right)$$

$p=2$

$$\mathcal{Z}\{x[n+2]\} = z^2\left(X(z) - x[0]z^{-0} - x[1]z^{-1}\right)$$

$$= z^2X(z) - z^2x[\emptyset] - z\,x[1].$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 4z}{z^2 - 5z + 6}$$

(i)

$$Y(z) = \frac{z^2 - 4z}{(z^2 - 5z + 6)\,z} \cdot z$$

$(z-2)(z-3)$

(ii)

$$Y(z) = \frac{z-4}{z^2 - 5z + 6} \cdot z$$

(iii)

$$Y(z) = \frac{z^2 - 5z + 6 + z - 6}{z^2 - 5z + 6}$$

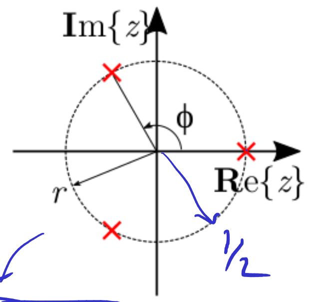
$$= 1 + \frac{z-6}{z^2 - 5z + 6} = 1 + \frac{(z-6)}{(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{z-6}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = (2 \cdot 2^n - 3^n)\, u[n]}$$

$$\delta[n] + u[n-1] = u[n]$$

4. Преносна карактеристика реалног дискретног филтра без нула функције преноса дата је половима у z-равни. Сви полови функције преноса се налазе на кружници полупречника $\boxed{r = \frac{1}{2}}$, један од полова је реалан, а потег другог заклапа са позитивним делом реалне осе угао $\phi = \frac{2\pi}{3}$, као на слици. Позната је још и минимална вредност амплитудске фреквенцијске карактеристике $|H(\mathrm{j}\Omega)|_{\min} = 1$. Одредити (а) функцију преноса филтра $H(z)$ и (б) скицирати амплитудску карактеристику у опсегу дискретних кружних учестаности $0 \le \Omega \le \pi$. Одредити (в) импулсни одзив датог филтра. Одредити (г) устаљени одзив овог филтра на побуду $x[n] = \cos(\pi n)\,\mathrm{u}[n]$



$$H(z) = \frac{H_0}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)} \qquad \begin{cases} p_1 = r \\ p_2 = r e^{j\phi} \\ p_2 = r e^{-j\phi} \end{cases}$$

$$\boxed{z^3 - \frac{1}{8} = 0}$$

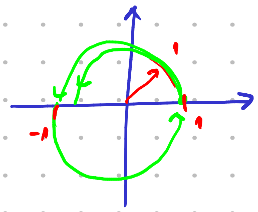
$$\Downarrow$$

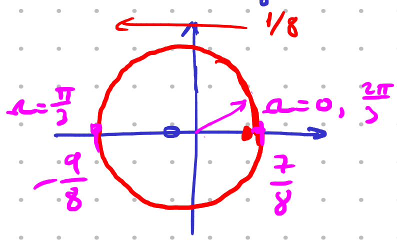
$H(z) = \dots$

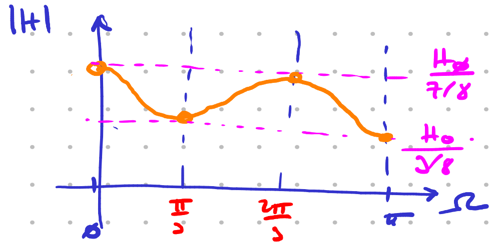
$$\boxed{H(z) = \frac{H_0}{z^3 - 1/8}}$$

$$|H(z)| = \frac{H_0}{|z^3 - 1/8|}, \quad z = e^{j\Omega} \Rightarrow |H(j\Omega)| = \frac{H_0}{\left|e^{j3\Omega} - \frac{1}{8}\right|}$$

$\Omega = 0 \div \pi$; $\quad e^{j3\Omega} \qquad e^{j3\Omega} - \frac{1}{8}$







H_{min}

$$\Rightarrow \frac{H_0}{9/8} = 1 \Rightarrow H_0 = \frac{9}{8} \Rightarrow$$

$$\boxed{H(z) = \frac{9/8}{z^3 - 1/8}}$$

(б) $$H(z) = \frac{9/8}{z^3 - 1/8} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + \dots$$

$$= \frac{9/8\, z^{-3}}{1 - \frac{1}{8}z^{-3}} = \frac{9}{8}z^{-3}\frac{1}{1-(2z)^{-3}} = \frac{9z^{-3}}{8}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^{-3k}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \sim \frac{1}{1-q}$$

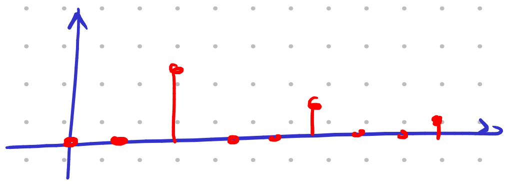
$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\frac{9}{8}2^{-3k}}^{x[n]} z^{-\overbrace{3(k+1)}^{n}}$$

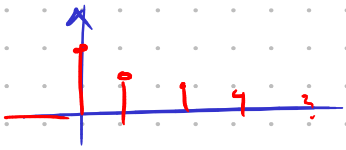
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$x[\overbrace{3(k+1)}^{n}] = \frac{9}{8}2^{-3\cdot k}u[k]$$

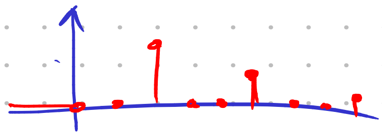
3, 6, 9, ...



$$G(z) = \frac{9/8}{z - 1/8} \qquad g[n] \sim \frac{9}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n} u[n]$$



$$H(z) = \frac{9/8}{z^3 - 1/8} \qquad h[3n] \sim \frac{9}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{3n} \cdot [3n]$$



$$H(z) = G(z^3).$$

$$y[n] - 2y[n-1] \qquad \Big| \qquad y[n] - 2y[n-6]$$

$$Y(1 - z^{-1}) \qquad \Big| \qquad Y(1 - z^{-6})$$