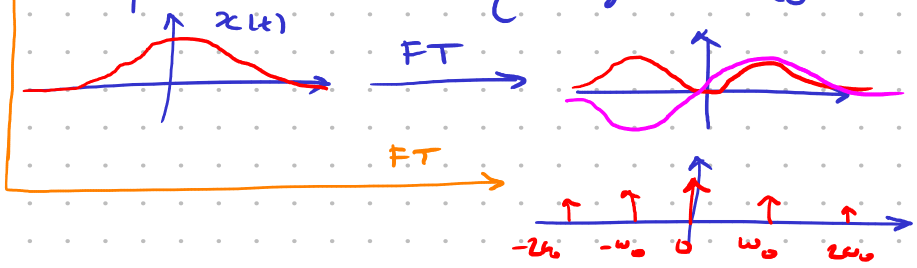
Континуални $x(t)$

CTFS — Периодичан: $FS\{x(t)\} = X[k]$

CTFT — Апериодичан: $FT\{x(t)\} = X(j\omega)$

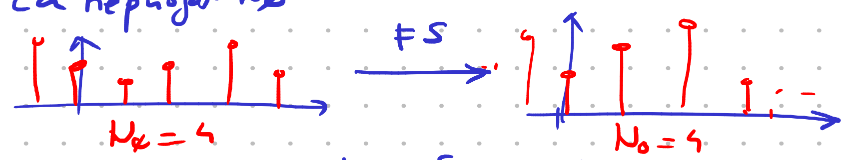


Дискретни $x[n]$

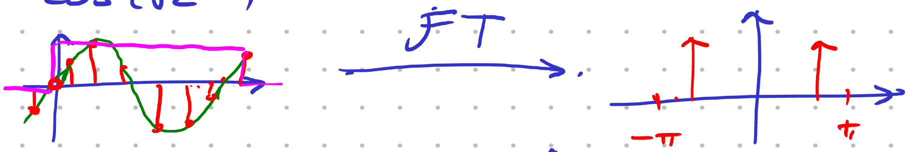
$\cos(\Omega n)$
$= \cos((\Omega+2\pi)n)$

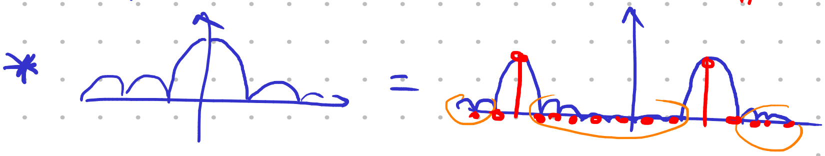
DTFS
DFT
„FFT"

Периодичан са периодом N_0 $\quad FS\{x[n]\} = X[k],\ k\in\langle N_0\rangle$



DTFT — Апериодичан $\cos(\sqrt{2}\, n)$ $\quad FT\{x[n]\} = \underline{X(j\Omega)}$ $\quad 0<\Omega<2\pi$





1. Дат је дискретан сигнал $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{u}[n+2]$. Одредити (а) његову Фуријеову трансформацију.

$a^n\,\mathrm{u}[n]$, $\boxed{\lvert a\rvert < 1}$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$x[n-n_0]$	$X(j\Omega)\,\mathrm{e}^{-j\Omega n_0}$

$z = e^{j\Omega}$

$(s = j\omega)$

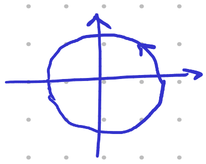
$|z| = 1$!

$z + z^* = e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}$
$= 2\cos\Omega$.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2-2} u[n+2] = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2] = 16\, g[n+2]$$

$$\therefore\ g[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow G(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow$$

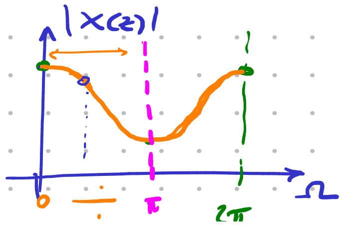
$$FT\{g[n+2]\} = G(z)\cdot z^2 \Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{16z^2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}$$



$$\Rightarrow X(z) = \frac{16z^3}{z-\frac{1}{4}};\quad |X(z)| = \frac{16\,\cancel{|z^3|}^{\,1}}{\left|z-\frac{1}{4}\right|} = \frac{16}{\left|z-\frac{1}{4}\right|};\quad;\quad |a| = \sqrt{a\cdot a^*}$$

$$|X(z)| = \frac{16}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)^*}} = \frac{16}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z^*-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{16}{\sqrt{zz^*-\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}z^*+\frac{1}{16}}} = \frac{16}{\sqrt{1+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}(z+z^*)}}$$

$$|X(z)| = \frac{16}{\sqrt{\frac{17}{16} - \frac{1}{4}\cdot 2\cos\Omega}} = \frac{64}{\sqrt{17 - 8\cos\Omega}}$$



$|H|$, $\arg H$

2. Систем је описан диференцном једначином $y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$. Одредити (а) импулсни одзив тог система применом дискретне Фуријеове трансформације. Израчунати појачање амплитуде и померај фазе на учестаностима $\Omega \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right\}$.

$D \doteq n \mapsto n-1.$

$y = y[n] \qquad y + \frac{1}{4}Dy - \frac{1}{8}D^2 y = x - Dx = (1-D)x \quad \cdot E^2$

$x[n+1] \mapsto z X(z)$

$P(E)x[n] \mapsto P(z)X(z)$

$P(D)x[n] \mapsto P(z^{-1})X(z)$

$E^2 y + \frac{1}{4}Ey - \frac{1}{8}y = (E^2 - E)x \Rightarrow$

$$H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{z^2 - z}{\boxed{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}}} = z\cdot\frac{(z-1)}{\cancel{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)}} = z\left(\frac{A}{\boxed{z+\frac{1}{2}}} + \frac{B}{\boxed{z-\frac{1}{4}}}\right)$$

$z = -\frac{1}{2} \qquad z = \frac{1}{4}$

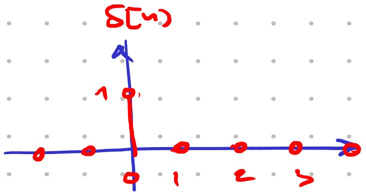
$$A = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 2; \quad B = \frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = -1.$$

$$H(z) = 2\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{h[n] = \left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u[n]}$$

$a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\cdot z$

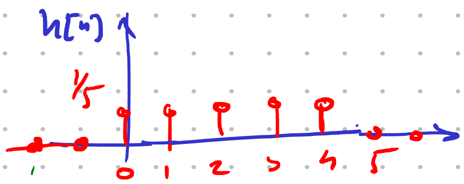
3. Дискретан филтар, познат под називом *moving average* филтар, се реализује тако што се за одређивање текућег члана одзива усредње текућа и претходних четири вредности побуде. Скицирати (а) импулсни одзив овог филтра. Одредити (б) дискретне кружне учестаности Ω $(0 \le \Omega \le \pi)$ које овај филтар у потпуности потискује (уклања). Скицирати (в) дијаграм амплитудске фреквенцијске карактеристике у опсегу $\boxed{0 \le \Omega < \pi}$.

$$\frac{x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-4]}{5} = y[n] \qquad D \to z^{-1}$$



$$h[n] = \frac{1}{5}\left(u[n] - u[n-5]\right), \quad H(j\Omega) = \emptyset.$$

$$h[n] = \frac{1}{5}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-4]\right)$$

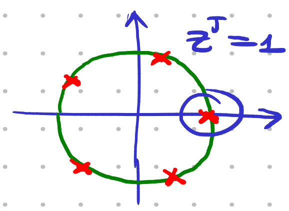


$$H(z) = \frac{1}{5}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\right) = \frac{1}{5}\,\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$H(z) = \emptyset \Rightarrow z^5 = 1$

осим $z = 1$



$$z = e^{j\boxed{\frac{2\pi}{5}k}} \quad \Omega_\emptyset.$$