3 Континуални системи

Увод и основни йојмови.

1.[1] За следеће системе испитати да ли су стабилни у *BIBO* смислу, линеарни, временски инваријантни, са меморијом и каузални:

(а) $y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t-kT)$,

(б) $y(t)=\sqrt{2}x(t)$,

(в) $y(t)=tx(t-1)^2$,

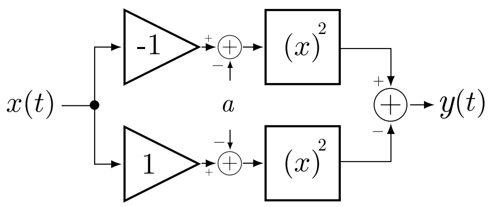
(г) $y(t)=\int\limits_{\tau=-\infty}^{t}x(\tau)\sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

(д) $y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}t}$,

(ђ) $y(t)=t\mathrm{e}^{x(t)-t}$,

где је $y(t)=O\{x(t)\}$ одзив посматраног система.

2. У систему са слике употребљени су идеални појачавачи сигнала, суматори и блокови за квадрирање, а a је позната реална константа. Одредити (а) везу између излаза и улаза система. Испитати да ли је тај систем (б) линеаран, (в) са меморијом и (г) стабилан у *BIBO* смислу.

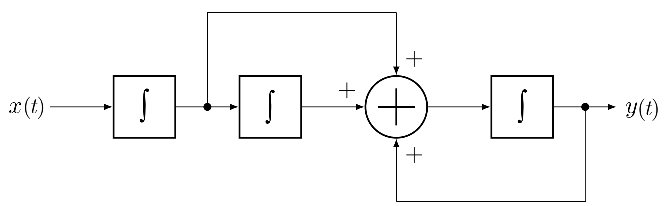


3. У систему са слике употребљени су идеални блокови за интеграљење и суматори. Улаз система је континуалан сигнал $x=x(t)$ а излаз је континуалан сигнал $y=y(t)$.

(а) Описати систем одговарајућом диференцијалном једначином,

(б) одредити импулсни одзив тог система, $h(t)$, и

(в) испитати стабилност тог система у *BIBO* смислу.



Континуални LTI системи.

4.[2] Континуалан систем је диференцијалном једначином у облику

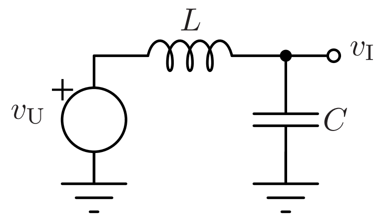
$$(\mathrm{D}+1)y(t)=x(t),$$

где су $x=x(t)$ и $y=y(t)$ побуда и одзив тога система, а $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ је оператор диференцирања. Познат је преиницијални услов одзива $y(0^-)=1$. Побуда је дата изразом $x(t)=\cos(t)\mathrm{u}(t)$. Одредити сопствени ($y_\mathrm{a}$), принудни ($y_\mathrm{f}$), комплетни ($y$), прелазни ($y_\mathrm{t}$), и устаљени ($y_\mathrm{ss}$) одзив система за задату побуду.

[1] Видети и задатак 2.8. из референтне збирке задатака

[2] Видети и задатке 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.49 из референтне збирке задатака.

5. У колу са слике познати су $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_\mathrm{U} = v_\mathrm{U}(t)$ а излаз напон у колу $v_\mathrm{I} = v_\mathrm{I}(t)$.



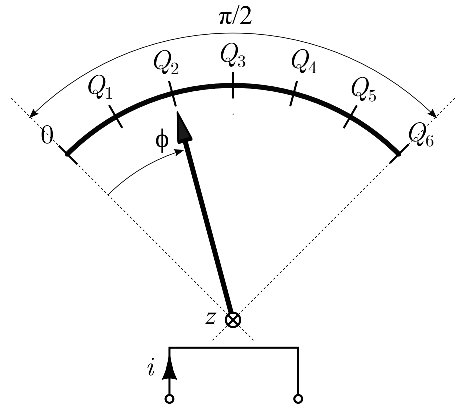
(а) Одредити диференцијалну једначину која описује овај систем.

(б) Испитати стабилност овог система у *BIBO* смислу; и

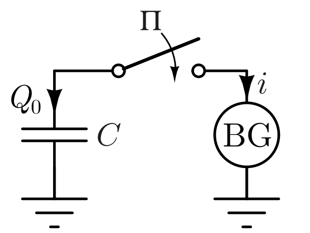
(в) одредити одзив на импулсну побуду $v_\mathrm{U} = \Phi_0 \delta(t)$, где је $\Phi_0 = 10\,\mu\mathrm{Wb}$.

(г) Одредити одзив на побуду $v_\mathrm{U}(t) = 1\,\mathrm{V}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$, где је $\omega_0 = 100\,\dfrac{\mathrm{krad}}{\mathrm{s}}$.

6. *(Јул 2021)* На слици 1 је приказана једна конструкција балистичког галванометра (БГ), инструмента за мерење протока наелектрисања. Казаљка инструмента може да прави угаони отклон у границама $0 \leqslant \phi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Веза између струје, $i = i(t)$, на јединoм електричном приступу БГ и угаоног отклона казаљке, $\phi = \phi(t)$, дата је диференцијалном једначином $J\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + F\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + K\phi = \alpha i$, при чему је познато $J = 6\,\mathrm{s}^2$, $F = 24\,\mathrm{s}$, $K = 24$ и $\alpha = \pi\mathrm{e}\,\dfrac{1}{\mu\mathrm{A}}$, где је e основа природног логаритма. Сматрати да се тај приступ БГ, у електричном смислу, понаша као савршен кратак спој. Инструмент се калибрише на основу огледа са слике 2. Непосредно пре затварања прекидача, кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q_0 = 1\,\mu\mathrm{C}$ а казаљка БГ мирује у нултом положају, $\phi = 0$.



Слика 1.



Слика 2.

(а) Решавањем у временском домену одредити кретање казаљке, $\phi(t)$, по затварању прекидача до успостављања новог стационарног стања.

(б) Скицирати временски дијаграм $\phi(t)$.

(в) Израчунати вредности једнако размакнутих подеока са слике 1, Q_1, Q_2, ..., Q_6, ако се као показивање инструмента (односно, количина наелектрисања протекла у импулсу) очитава вредност на коју показује казаљка у тренутку када је <u>најдаље</u> од нултог подеока током свог кретања.

7. *(Септембар 2021)* Нека је дат систем једначина
$$\begin{cases} \left(\mathrm{D}^2 + \dfrac{1}{25}\right) g(t) = \mathrm{D}x(t) \\ y(t) = g(t) \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT - \tau) \end{cases}$$
, где је $T = 20\pi$, а D је оператор диференцирања. Дати систем једначина описује каузалан *LTI* систем чији је једини улаз $x(t)$ а једини излаз $y(t)$. Израчунати **минималну** вредност параметра $\tau > 0$ тако да је посматрани систем стабилан у *BIBO* смислу.

Конволуција континуалних сигнала.

8. Дати су сигнали $x = x(t)$ који се доводе на улаз система чији је импулсни одзив дат изразом $h = h(t)$. Одредити принудни одзив у случајевима:

(а) $x(t) = \mathrm{u}(t)$, $h(t) = \delta(t - T)$, $T \in \mathbb{R}$

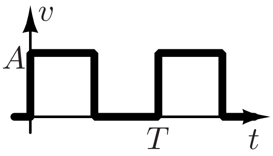
(б) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{u}(t)$, где су $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ и $a \neq b$

(в) $x(t) = t^k\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{u}(t)$, где је $k \neq -1$.

(г) $x(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t - T)$, $h(t) = x(t)$, где је $T \in \mathbb{R}^{+}$.

9. Полазећи од дефиниције конволуције два континуална сигнала, $x = x(t)$ и $y = y(t)$, доказати да је $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x * y)\,\mathrm{d}t = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}t\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}t\right)$, под условом да оба интеграла са десне стране конвергирају.

10. За периодичне сигнале са основним периодом T може се дефинисати операција *периодичне конволуције* као $x \circledast y = \int\limits_{0}^{T} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Периодична поворка униполарних правоугаоних импулса $v = v(t)$ приказана је на слици. Одредити $v \circledast v$.



11. *(Јул 2021)* Нека је дат континуалан сигнал $x(t) = \delta(t-1)$, и познато је да је $x(t) * x(1-2t) = A\delta(Bt+C)$, где су A, B и C рационалне константе, при чему је $0 < B < 2$. Израчунати вредности константи A, B и C.

Решења

1.

	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(ђ)
Линеаран	✓	✓		✓	✓	
Временски инваријантан	✓	✓			✓	
Са меморијом	✓		✓	✓	?	
Стабилан		✓	✓			✓
Каузалан	✓	✓	✓	✓		✓

2. (а) $y(t) = 4ax(t)$,   Систем је (б) линеаран, (в) без меморије и (г) стабилан.

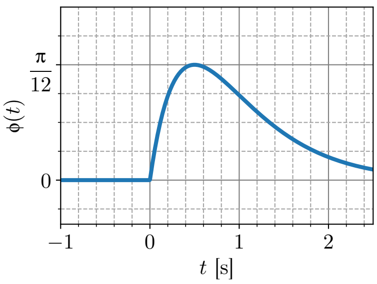
3. (а) $(\mathrm{D}^3 - \mathrm{D}^2)y(t) = (\mathrm{D}+1)x(t)$,   (б) $h(t) = \left(-2 - t + 2\mathrm{e}^t\right)\mathrm{u}(t)$.   (в) Систем није *BIBO* стабилан.

4. $y_\mathrm{a} = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$, $y_\mathrm{f} = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{u}(t)$, $y = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{u}(t)$, $y_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$, $y_\mathrm{ss} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

5. (а) $(1 + \tau^2\mathrm{D}^2)v_\mathrm{I} = v_\mathrm{U}$, где је $\tau = 10\,\mu\mathrm{s}$ (б) Систем није *BIBO* стабилан,   (в) $v_{\mathrm{I,p}}^{(\text{в})}(t) = 1\,\mathrm{V}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{u}(t)$
(г) $v_{\mathrm{I,p}}^{(\text{г})}(t) = 50\frac{\mathrm{mV}}{\mu\mathrm{s}}\,t\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{u}(t)$

6. (а) Казаљка се креће према изразу $\phi(t) = \Phi_0'\,t\,\mathrm{e}^{\sigma t}$, где су $\Phi_0' = \frac{\pi\mathrm{e}}{6}\,\mathrm{s}^{-1}$ и $\sigma = -2\,\mathrm{s}^{-1}$.

(б) Тражени дијаграм је на слици,



(в) Подеоци треба да буду $Q_k = k\,\mu\mathrm{C}$ за $k = 1, 2, \ldots, 6$.

7. $\tau = 2{,}5\pi$.

8. (а) $y_\mathrm{p}(t) = \mathrm{u}(t - T)$,   (б) $y_\mathrm{p}(t) = \frac{\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}}{a - b}\mathrm{u}(t)$,   (в) $y_\mathrm{p}(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}\mathrm{u}(t)$ (г) $y_\mathrm{p}(t) = T\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T} - 1\right)$

9. $$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}t\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}t\right)$$

10. $v \circledast v(t) = \frac{A^2T}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{tri}\left(\frac{2(t - kT)}{T} - 1\right)$.

11. $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -1$.