

CIRKULARNA (PERIODIČNA) KONVOLUCIJA

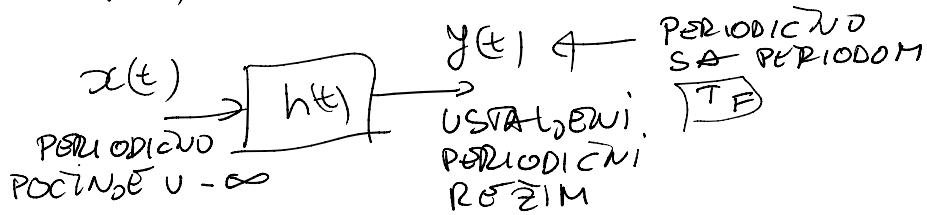
$$\left. \begin{array}{l} x(t) \quad t_0 < t < t_2 \\ h(t) \quad t_1 < t < t_3 \end{array} \right\} y(t) = x(t) * h(t) \\ t_0 + t_1 < t < t_2 + t_3$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \quad -\infty < t < +\infty \\ h(t) : \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \\ \quad \quad \quad t_1 < t < t_3 \\ \quad \quad \quad (-\infty) \quad (+\infty) \end{array} \right\} y(t) = x(t) * h(t) \\ -\infty + t_1 < t < \underbrace{+\infty + t_3}_{+\infty}$$

$x(t)$: PERIODIČNO, PERIODA T_F

$-\infty < t < +\infty$ NEOGRANIČEN SIGNAL

$h(t)$: APSOLUTNO INTEGRABILAN



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

PERIODIČNO SA PERIODOM T_F

AKO $h(t)$ NIJE APSOLUTNO INTEGRABILAN

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow$ DIVERGIRA!

$x(t) * h(t)$ NE KONVERGIRA (U VEĆINI SLUČAJEVA)

$x(t)$ PERIODIČNO T_F

$h(t)$ APSOLUTNO INTEGRABILAN

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau =$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t_0 + (k+1)T_F}^{t_0 + kT_F} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right) d\tau =$$

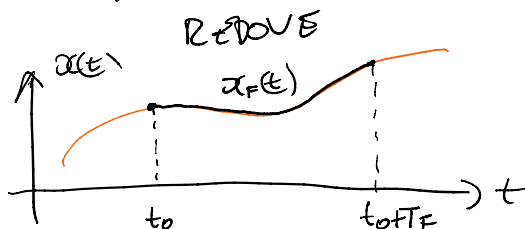
$$\tau \rightarrow \tau + kT_F$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t_0 + kT_F}^{t_0 + (k+1)T_F} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t_0}^{t_0 + T_F} h(\tau + kT_F) \underbrace{x(t - \tau - kT_F)}_{x(t - \tau)} d\tau \right) = \\
&\quad \text{(SMENA } \tau \rightarrow \tau + kT_F) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t_0}^{t_0 + T_F} h(\tau + kT_F) x(t - \tau) d\tau \right) = \\
&= \int_{t_0}^{t_0 + T_F} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(\tau + kT_F) x(t - \tau) \right) d\tau = \\
&= \int_{t_0}^{t_0 + T_F} x(t - \tau) \left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(\tau + kT_F)}_{h_F(\tau) \text{ (PERIODIČKI PRODUZENA)}} \right) d\tau = \\
&= \int_{t_0}^{t_0 + T_F} x(t - \tau) \cdot h_F(\tau) d\tau = x(t) \otimes h_F(t) \\
&\quad \text{CIRKULARNA (PERIODIČNA) KONVOLUCIJA PERIODIČNIH SIGNALA}
\end{aligned}$$

REZIME:

- POJAM CIRKULARNE KONVOLUCIJE
- USLOVI ZA EGZISTENCIJU (DOVOLJNI - NE)
- RAČUNANJE

RAZVOJ KONTINUALNIH SIGNALA U FURIJEOVE



SKUP SVIH
SIGNALA
KOJI MOGU
DA BUDU
I KOMPLEKSNI
 $t_0 \leq t < t_0 + T_F$
↓

$$1 \quad t_0 \quad t_0 + T_F \quad t_0 \leq t < t_0 + T_F$$

$$\Downarrow$$

$$x_F(t)$$

DIRINLEDOVI USLOVI

- ① $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$
- ② KONAČAN BROJ EKSTREMUMA
- ③ KONAČAN BROJ PREKIDA PRVOG REDA

OBRAZUJU VEKTORSKI PROSTOR
NAD $\mathbb{C}$

ORTOGONALNI BAZIS

$$e^{jk\omega_F t} \quad \omega_F = 2\pi f_F$$

$$f_F = \frac{1}{T_F}$$

$$\langle x_F(t), x_F(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0 + T_F} x_F(t) \overline{x_F(t)} dt$$

$$\overline{e^{+jn\omega_F t}} = e^{-jn\omega_F t}$$

$$\langle e^{jk\omega_F t}, e^{jn\omega_F t} \rangle = \int_{t_0}^{t_0 + T_F} e^{jk\omega_F t} e^{-jn\omega_F t} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0 + T_F} e^{j(k-n)\omega_F t} dt = \begin{cases} k=n \int_{t_0}^{t_0 + T_F} dt = T_F \\ k \neq n \int_{t_0}^{t_0 + T_F} e^{j(k-n)\omega_F t} dt = 0 \end{cases}$$

$$x_F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_F t}$$

KOMPLEKSAN
FURIJEOV RED

$$\langle x_F(t), e^{jn\omega_F t} \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_F t}, e^{jn\omega_F t} \right\rangle$$

$$= \int_{t_0}^{t_0 + T_F} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_F t} \right) \cdot e^{-jn\omega_F t} dt =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \int_{t_0}^{t_0 + T_F} e^{j(k-n)\omega_F t} dt = X[n] \cdot T_F$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_F} e^{jk\omega_F t} e^{-jn\omega_F t} dt}_{\substack{= T_F \text{ za } k=n \\ = 0 \text{ za } k \neq n}} = X[n] \cdot T_F$$

$$X[n] = \frac{1}{T_F} \int_{t_0}^{t_0+T_F} x_F(t) e^{-jn\omega_F t} dt$$

$$n \rightarrow k$$

$$X[k] = \frac{1}{T_F} \int_{t_0}^{t_0+T_F} x_F(t) e^{-jk\omega_F t} dt$$

$$X[0] = \frac{1}{T_F} \int_{t_0}^{t_0+T_F} x_F(t) dt \quad \text{SREDNJA VREDNOST SIGNALA } x_F(t)$$

$$\omega_F = 2\pi f_F \quad f_F = \frac{1}{T_F}$$

$X[k]$ — KOEFICIJENTI FURIJEVOG REDA
SPEKTRALNI KOEFICIJENTI
SIGNALA $x_F(t)$

REĐNI BROJ HARMONIKA OSNOVNE
UČESTANOSTI ω_F

PROIZVOLJNO $x_F(t)$ KOJE ZADOVOLJAVA
DIRICHLEVOVE USLOVE MOŽE DA SE
MOŽE DA SE RAZVINE U F. RED

$x_F(t)$ — KOMPLEKSNOM
(REALNO)

SIGNALI $x[k] e^{jk\omega_F t}$

PROSTO PERIODIČAN SIGNAL
UČESTANOSTI $k \cdot \omega_F$

HARMONIJSKE
KOMPONENTE SIGNALA $x_F(t)$ } HARMONICI

$X[0]$ — JEDNOSMERNI (DC)
KOMPONENTA

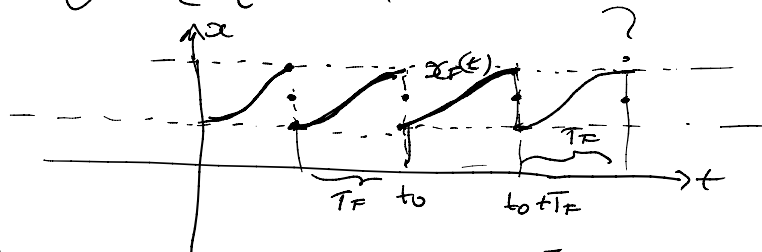
ZA $k \geq \pm 1$, $X[\pm 1] e^{\pm j\omega_F t}$

COMPONENTA

za $k \geq \pm 1$, $X[k] e^{\pm j k \omega_F t}$
 OSNOVNI (PRVI) HARMONICI
 SIGNALA $x_F(t)$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{j k \omega_F t}$$

DEFINISANA
 ZA $-\infty < t < +\infty$
 ŠTA JE
 VAN INTERVALA
 $t_0 < t < t_0 + T_F$



$x^*(t) \rightarrow$ PERIODIČKO PRODUŽENJE
 $x_F(t)$

$x_F(t) \leftarrow$ SEGMENT $x(t)$

$x^*(t) \leftarrow$ PERIODIČKI PRODUŽENO $x_F(t)$

$x(t) \neq x^*(t)$ GENERALNO
 OSIM U SPECIJALNIM
 SLUČAJEVIMA:

KADA JE $x(t)$ PERIODIČNO!

KADA JE $x_F(t)$ JEDNAKO JEDNOM
 CELOJ PERIODI $x(t)$

KADA JE $x^*(t) = x(t)$

AKO $x(t)$ IMA PERIODU T_0

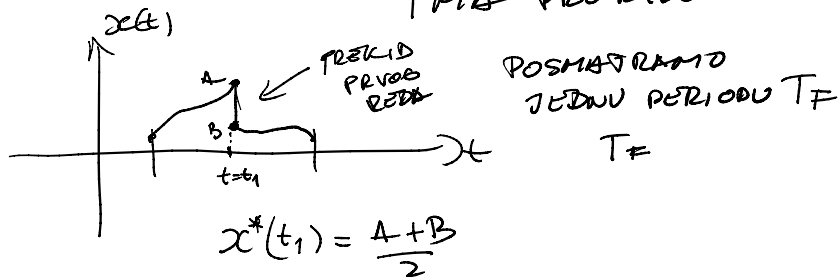
$T_F = m \cdot T_0$ $m = 1, 2, \dots \Rightarrow x^*(t) = x(t)$

OSNOVNI METOD ANALIZE KONTINUAL
 NIH PERIODIČNIH SIGNALA

(RAZVOJ $T_F = m T_0$ IDEALNO $m = 1$)

$x(t)$: PERIODIČNO MOŽE DA
 ...

$x(t)$: PERIODIČNO MOŽE DA
IMA PREKIDE



KONVERGENCIJA FURIJEVOG
REDA U TAČKI PREKIDA

ALTERNATIVNI RAZVOJI

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{jk\omega_F t} \quad T_0 \text{ OSNOVNA (} T_F \text{) PERIODA}$$

$$x[k] = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_F t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_F t} dt$$

$$x[k] e^{jk\omega_F t} \quad \text{--- K-TA HARM. KOMP}$$

↑ KOMPLEKSNA AMPLITUDA

SKUP SVIH $x[k] \leftrightarrow$ FREKVENCIJSKI
SPEKTAR SIGNALA $x(t)$

$$x[k] = \underbrace{|x[k]|}_{\text{AMPLITUDSKI SPEKTAR SIGNALA } x(t)} e^{j\theta[k]} \quad \uparrow \text{FAZNI SPEKTAR SIGNALA } x(t)$$

$x[k], |x[k]|, \theta[k] : \text{DISKRETNJI SIGNALI (FUNKCIJE)}$
U KOMPLEKSNOM DOMENU

$$F_s \{x(t)\} = x[k]$$

↑
PREDSAVA $x(t)$ U VREMENSKOM DOMENU

↑
PREDSAVA $x(t)$ U FREKVENCIJSKOM DOMENU

$$x(t) \xleftrightarrow{F_s} x[k]$$

ALTERNATIVNI RAZVOJI (NASTAVAK)

— $X[k]$ NEMAJU VEZE SA $X[-k]$
U OPŠTEM SLUČAJU

— $x(t)$ REALAN SIGNAL

$$X[-k] = \overline{X[k]}$$

$$X[-k] = X^*[k]$$

$$\begin{aligned} X &= X_R + jX_I \\ X^* &= X_R - jX_I \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} X[k] &= X_R[k] + jX_I[k] \\ X^*[k] &= X_R[k] - jX_I[k] \end{aligned} \right.$$

$$X_R[k] - jX_I[k] = X_R[-k] + jX_I[-k]$$

$$\begin{aligned} X_R[k] &= X_R[-k] \quad \text{PARNI} \\ -X_I[k] &= X_I[-k] \quad \text{NEPARNI} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} |X[-k]| &= |X[k]| \\ \theta[-k] &= -\theta[k] \end{aligned} \right.$$

AMPLITUDSKI SPOREDAK: PARNA FUNKCIJA PO k
FAZNI SPOREDAK: NEPARNA FUNKCIJA PO k

$$X[-k] = X^*[k]$$

$$X[-k] = |X[-k]| e^{j\theta[-k]} = |X[k]| e^{-j\theta[k]}$$

$$|X[-k]| = |X[k]| \leftarrow \text{PARNO}$$

$$\theta[-k] = -\theta[k] \leftarrow \text{NEPARNO}$$

$x(t)$ — PERIODA T_0 ($x(t) \neq 0$ NA t_0, t_0+T_0)

$$x(t) = \underbrace{A[0]}_{\text{CONST PARNO}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A[k] \cos(k\omega_0 t) + B[k] \sin(k\omega_0 t))}_{\text{PARNI SED NEPARNI SED}}$$

$$A[0] = X[0] \quad A[k] = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$A[0]$$

$$\downarrow \quad \infty$$

$$B[k] = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

$$\downarrow \quad \infty \quad \leftarrow \varphi[k]$$

$$x(t) = C[0] + \sum_{k=1}^{\infty} C[k] \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$\uparrow$ JEDNOSMERNA KOMPONENTA $\uparrow$ NAEZMERNA KOMPONENTA SIGNALA

$$C[k] \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \leftarrow k\text{ATI HARMONIK}$$

$\uparrow$ AMPLITUDA

$$C[1] \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \leftarrow \text{PRVI OSNOVNI HARMONIK}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \leftarrow \text{OSNOVNA PERIODA}$$

(RAZVOJ NA OSNOVNOJ PERIODI!)

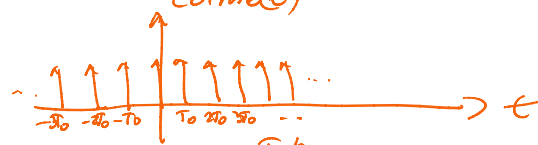
$$C[k] = \sqrt{A[k]^2 + B[k]^2} = 2|X[k]|$$

$$\varphi_k = -\arctg\left(\frac{B[k]}{A[k]}\right) = \arg(X[k])$$

$$X[k] = \frac{A[k] - jB[k]}{2} \quad k > 0$$

$$X[0] = A[0]$$

Δ RAZVOJ PERIODIČNOG COMB(t) u F. RED



PERIODA JE T_0

$$X[k] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$X[k] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\text{comb}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t)$$

$$\text{comb}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t)$$

OSOBINE KOEFICIJENATA FURIJEVOG REDA

$$F_s \{x(t)\} = X[k]$$

- a) $x(t)$ koji zadovoljava D USLOVE
b) $x(t)$ PERIODICNO OSNOVNA PERIODOM T_0

① $F_s \{ax(t) + b \cdot y(t)\} = aX[k] + b \cdot Y[k]$
BEZ DOKAZA

② $F_s \{x(t-t_0)\} = X[k] e^{-jk\omega_0 t_0}$ KASNIJEJE U t D OMEU

$\downarrow$
periodično sa ω_F

$$\int_{T_F} x(t-t_0) e^{-jk\omega_F t} dt = \int_{T_F} x(t-t_0) e^{-jk\omega_F(t-t_0)} e^{-jk\omega_F t_0} d(t-t_0)$$

$t-t_0 = \tau$

$$F_s \{x(t-t_0)\} = \left(\int_{T_F} x(\tau) e^{-jk\omega_F \tau} d\tau \right) e^{-jk\omega_F t_0}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{X[k]}$

③ $x(t)$ periodično sa ω_F

$$F_s \{x(t) e^{jk_0 \omega_F t}\} = X[k-k_0] / F_s^{-1}$$

$$F_s^{-1} \{X[k]\} = x(t)$$

$$F_s^{-1} \{X[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_F t}$$

$$\underbrace{F_s^{-1} \{F_s \{x(t)\}\}}_{x(t)} = F_s^{-1} \{X[k]\}$$

$$\underbrace{F_s^{-1} \{F_s \{x(t) e^{jk_0 \omega_F t}\}\}}_{x(t) e^{jk_0 \omega_F t}} = F_s^{-1} \{X[k-k_0]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k-k_0] e^{jk\omega_F t}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{x(t) e^{jk\omega t}}_{TS \text{ } \& \text{ } TS \text{ } (u(t))} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k-k_0] e^{jk\omega t} = \\
 & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k-k_0] e^{j(k-k_0)\omega t} e^{jk_0\omega t} = \\
 & = e^{jk_0\omega t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k-k_0] e^{j(k-k_0)\omega t} \quad k-k_0 = m \\
 & = e^{jk_0\omega t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{jm\omega t} \\
 & \quad \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{jm\omega t}}_{x(t)}
 \end{aligned}$$

④ $\mathcal{F}_s\{x(t)\} = X[k]$ INVERZIJA VREMENSKE OSE

$$e^{jk\omega t} \Rightarrow e^{j(k)\omega t} = e^{jk\omega(-t)}$$

⑤ SKALIRANJE VREM OSE

$x(t) \rightarrow$ PERIODICAN SA T_0 $\alpha > 0$

$T_F \rightarrow$ PERIODA IZRAČUNAVANJA

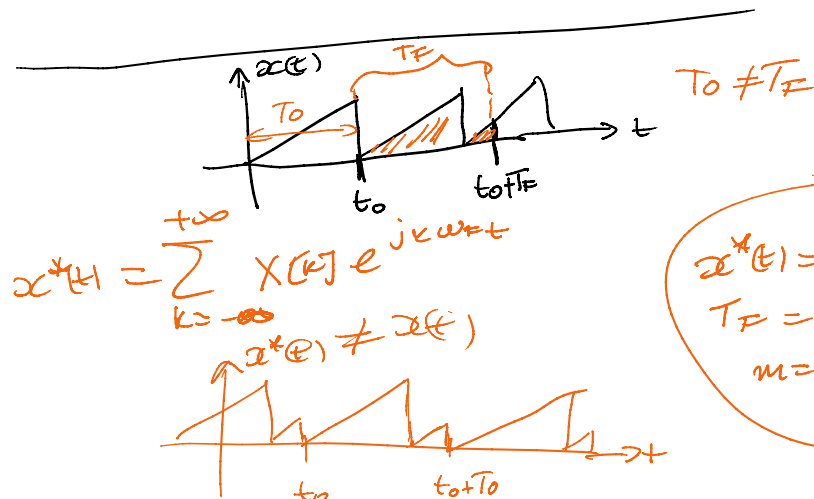
SIGNAL

$T_F = T_0$

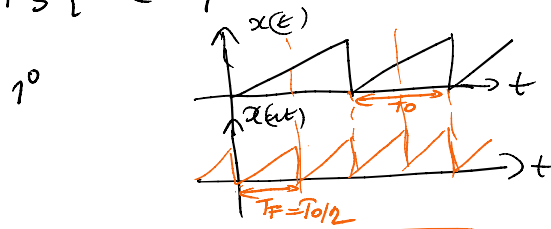
$\uparrow$

IZRAČUNAVANJE

} " SUB SE POKLAPA "



$$F_s \{ x(at) \} = ? \quad a > 0$$



$$a > 1$$

$$a = 2$$

$$T_F = T_0/a = T_0/2$$

$$KADA JE \boxed{T_F = T_0/a}$$

$$TADA JE F_s \{ x(at) \} = X[k]$$

$$x(k) \neq x(at)$$

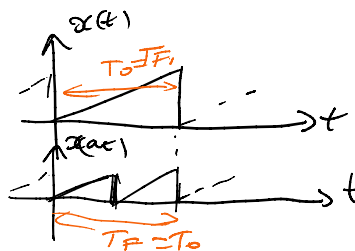
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 at}$$

$$\omega_F \neq \omega_0$$

$$T_F = T_0$$

$$F_s \{ x(at) \} = ? \quad a > 0$$



$$F_s \{ x(at) \} = \begin{cases} X\left[\frac{k}{a}\right] & \frac{k}{a} \text{ CELOBROJNO} \\ 0, & \frac{k}{a} \text{ NIJE CELOBROJNO} \end{cases} \quad T_F = T_0$$

$$a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{3} \quad a = \frac{1}{p} \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\frac{k}{a} \in \text{CELOBROJNO}$$

$a < 1$
EKSPANZIJA
OSE

$$a > 1 \quad \text{ZA } k=1 \quad \frac{k}{a} \text{ NIJE CEO BROJ}$$

KOMPRESIJA

⑥ PROMENA PERIODE IZRAZAVANJA

$$F_s \{ x(t) \} = X[k] \quad T_0 \text{ PERIODE } x(t)$$

$F_s \{x(k)\} = X[k]$ TO PERIODOD $x(k)$

$X[k]$ KOEFICIJENTI KAOŠE $x(k)$
RAZVIJE NA $T_F = m \cdot T_0$

1° m NIDE ČEO BROJ

$X[k]$ JE U "LOŠOJ" KORESPONDENCI
SA $Y[k]$

POTREBUO JE ODREDITI $Y[k]$ PREKO DIF
INTEGRALA

2° $m \in \mathbb{N}$ $m > 1$

$$Y[k] = \begin{cases} X\left[\frac{k}{m}\right] & \frac{k}{m} \text{ CELOBROJNO} \\ 0 & \frac{k}{m} \text{ NIJE CELO BROJ} \end{cases}$$

UMETANJE m-1 NULE IZMEĐU
ORIGINARNIH HARMONIKA

Δ PRIMER

DATI SU $x(k)$ i $y(k)$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $2T_0$ $3T_0$

a) DA LI SU
 $x(k)$ i $y(k)$
REBLNI?
b) AKAJ, BAKI ZA x, y

$$X[k] = 2\delta[k-1] + 2\delta[k-2]$$

$$Y[k] = -\delta[k+1] + 3\delta[k-2]$$

$$Z(k) = x(k) + 2y(k) \leftarrow \text{RAZVITI NA NJEGOVOJ OSNOVNOJ PERIODI}$$

▽ REŠENJE (ODGOVOR)

NADJE SE OSNOVNA PERIODA

$$T_F = \text{NZS}(2T_0, 2T_0) = 6T_0$$

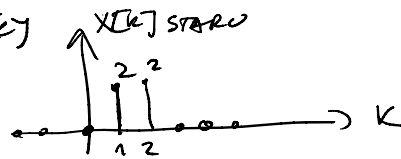
↑
OSNOVNA
PERIODA $z(k)$

$$F_s \{x(k) + 2y(k)\} = F_s \{x(k)\} + 2 F_s \{y(k)\}$$

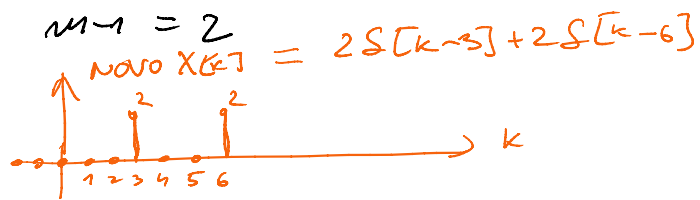
NA $6T_0$ NA $6T_0$

ZA $x(k)$ $m=3$ PA SE UBAČUJU 2 NULE
U IZ $X[k]$ INDEKSI POČINUJU OD NULE
STARU $X[k]$ $\uparrow$ $X[k]$ STARU

U 12 $X[k]$ (POBISI POČINU OD ...
 STARU $X[k]$



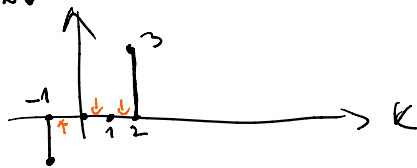
$$m=3 \quad m-1=2$$



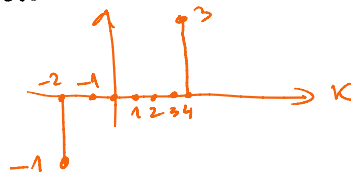
ZD $y[k]$ KADA PRAVIMO NA 6 TO

$$m=2 \quad m-1=1 \quad \text{UBACUJE SE JEDNA NULA}$$

$Y[k]$ STARU



$Y[k]$ NOVO



$$Y[k] \text{ NOVO} = -1\delta[k+2] + 3\delta[k-4]$$

$$Z[k] = 1 X[k]_{\text{NOVO}} + 2 Y[k]_{\text{NOVO}}$$

$$= \delta[k-3] + 2\delta[k-6] - 2\delta[k+2] + 6\delta[k-4]$$

$$k = 3, 6, -2, +4$$

$$\downarrow$$

$$X[3]=2 \quad X[6]=2 \quad X[-2]=-2 \quad X[4]=6$$
