

Glava 8

Šum u elektronskim kolima

1. Odrediti efektivnu vrednost napona termičkog šuma koji generiše otpornik $R=1\text{ k}\Omega$ na temperaturi $T=300\text{ K}$. Opseg učestanosti na kojoj se meri šum je $BW=1\text{ kHz}$, dok je $4kT=1,6\cdot 10^{-20}\text{ J}$.

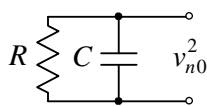
Rešenje:

Spektralna gustina snage termičkog šuma koji generiše otpornik R je

$$e_n^2 = 4kTR,$$

pa je efektivna vrednost napona šuma

$$V_n = \sqrt{e_n^2 \cdot BW} = \sqrt{4kTR \cdot BW} = 126,5\text{ nV}.$$

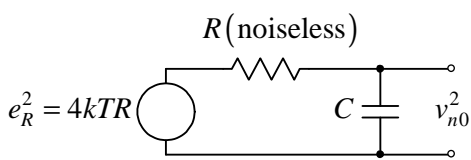


Slika 2.

2. Odrediti efektivnu vrednost napona termičkog šuma V_{n0} , slika 2, koji generiše otpornik $R=1\text{ k}\Omega$ na temperaturi $T=300\text{ K}$. Poznato je: $C=100\text{ nF}$ i $4kT=1,6\cdot 10^{-20}\text{ J}$. Koliko iznosi ekvivalentni propusni opseg termičkog šuma f_N ?

Rešenje:

Šema kola sa slike 2, u kojoj je ubačen uticaj ekvivalentnog naponskog generatora šuma čija je



Slika 2a.

spektralna gustina snage e_R^2 , je prikazana na slici 2a. Prema ovoj slici spektralna gustina snage termičkog šuma na izlazu je

$$v_{n0}^2 = \int_0^{\infty} e_R^2(f) \cdot |H(j2\pi f)|^2 df,$$

gde je

$$H(j2\pi f) = \frac{1}{1 + (j2\pi f)RC}.$$

Svođenjem se dobija da je

$$v_{n0}^2 = 4kT \int_0^{\infty} \frac{R}{1 + (2\pi f)^2 R^2 C^2} df = \frac{4kT}{2\pi C} \int_0^{\infty} \frac{RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{kT}{C},$$

odnosno

$$v_{n0}^2 = 4kTR \frac{1}{4RC} = e_R^2 \frac{1}{4RC} = e_R^2 f_{3dB}.$$

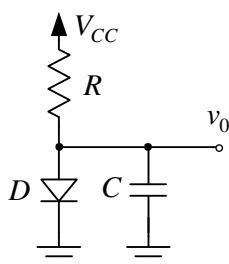
Ekvivalentni propusni opseg termičkog (belog) šuma je

$$f_N = \frac{\omega_{3dB}}{4} = \frac{\pi}{2} f_{3dB},$$

gde je $f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC}$ propusni opseg RC kola sa slike 2a.

Efektivna vrednost napona termičkog šuma na izlazu pojačavača je

$$V_{n0} = \sqrt{v_{n0}^2} = 0,2\text{ }\mu\text{V}.$$

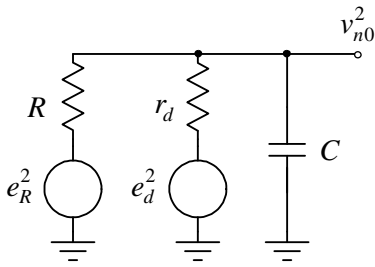


Slika 3.

3. Za kolo sa slike 3 je poznato: $V_D=0,6\text{ V}$, $V_{CC}=3\text{ V}$, $R=2,4\text{ k}\Omega$, $C=100\text{ nF}$, $V_t=25,7\text{ mV}$ i $4kT=1,6\cdot 10^{-20}\text{ J}$. Odrediti efektivnu vrednost napona termičkog šuma na izlazu V_{n0} .

Rešenje:

Na slici 3a prikazana je ekvivalentna šema kola sa slike 3, gde su uključeni svi generatori termičkog šuma. Prema ovoj slici je



Slika 3a.

šuma

$$e_R^2 = 4kTR = 3,84 \cdot 10^{-17} \text{ V}^2/\text{Hz}, \quad e_d^2 = 2kTr_d = 2,06 \cdot 10^{-19} \text{ V}^2/\text{Hz},$$

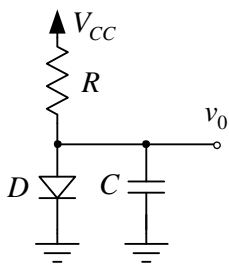
$$r_d = \frac{V_t}{I_D} = R \frac{V_t}{V_{CC} - V_D} = 25,7 \Omega.$$

Primenom Tevenenove teoreme dobija se

$$v_{n0}^2 = e_t^2 \frac{1}{4R_t C}, \quad R_t = r_d \parallel R \approx r_d, \quad e_t^2 = \frac{r_d^2 e_R^2 + R^2 e_d^2}{(R + r_d)^2} \approx e_d^2.$$

Smenom brojnih vrednosti dobija se efektivna vrednost napona

$$V_{n0} = \sqrt{v_{n0}^2} = 0,28 \mu\text{V}.$$

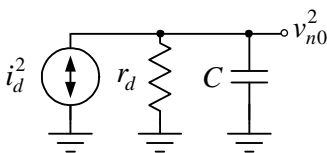


Slika 4.

4. Za kolo sa slike 4 je poznato: $V_D = 0,6 \text{ V}$, $V_{CC} = 3 \text{ V}$, $R = 2,4 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ nF}$, $V_t = 25,7 \text{ mV}$ i $4kT = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$. Spektralna gustina snage šuma koji dioda unosi u kolo data je izrazom $i_d^2(f) = 2qI_D + k_1 \frac{I_D}{f}$, $K_1 = 3 \cdot 10^{-16} \text{ A}$.

Odrediti zavisnost spektralne gustine snage šuma na izlazu u funkciji učestanosti $v_{n0}^2 = F(f)$, $1 \text{ Hz} \leq f \leq 1 \text{ MHz}$.

Rešenje:



Slika 4a.

Na slici 4a prikazana je ekvivalentna šema kola sa slike 4, gde je uračunat samo uticaj šuma diode. Termički šum koji potiče od otpornost R je zanemaren jer je on mnogo manji od šuma diode. Prema slici 4a je

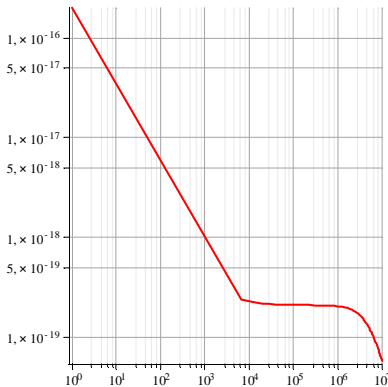
$$v_{n0}^2(f) = i_d^2(f) \frac{r_d^2}{1 + (2\pi f r_d C)^2},$$

odnosno

$$v_{n0}^2(f) = \left(\frac{2kT}{r_d} + k_1 \frac{I_D}{f} \right) \frac{r_d^2}{1 + (2\pi f r_d C)^2}.$$

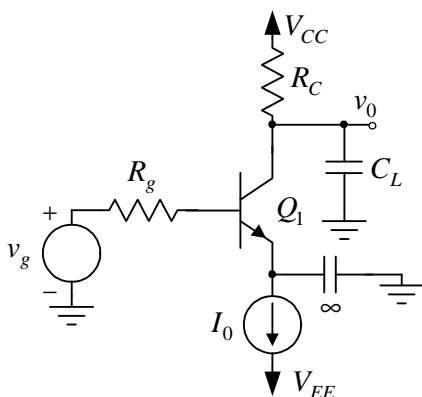
Smenom brojnih vrednosti se dobija

$$v_{n0}^2(f) = \left(2,1 \cdot 10^{-19} + \frac{2 \cdot 10^{-16}}{f} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{6,2 \text{ MHz}} \right)^2},$$



Slika 4b.

a na slici 4b. je grafički prikazana prethodna zavisnost (obe ose su u logaritamskoj razmeri).



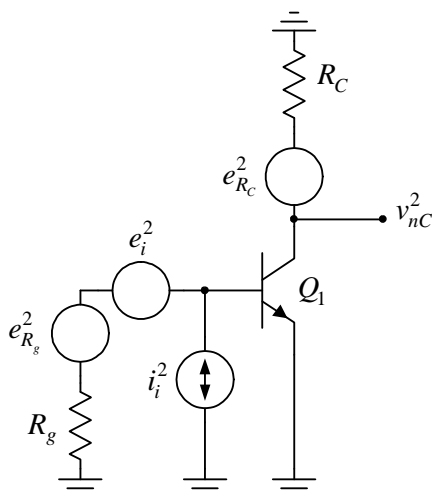
Slika 5.

5. Za pojačavač sa slike je poznato: $V_{CC} = -V_{EE} = 3 \text{ V}$, $R_g = 100 \Omega$, $r_b = 300 \Omega$, $R_C = 1 \text{ k}\Omega$, $\beta_F = \beta_0 = 100$ i $V_t = kT/q = 25,7 \text{ mV}$.

a) Odrediti spektralnu gustinu snage ekvivalentnog naponskog generatora šuma na ulazu pojačavača $e_{i,tot}^2$. Zanemariti uticaj flicker šuma. Zanemariti uticaj kondenzatora C_L .

b) Odrediti optimalnu vrednost struje strujnog izvora za koju ekvivalentni napon šuma na ulazu pojačavača ima minimalnu vrednost. Koliko je tada $e_{i,tot}^2$.

- c) Ako je $C_L = 100 \text{ pF}$, odrediti efektivnu vrednost napona šuma na ulazu pojačavača V_{ni} .
- d) Odrediti minimalnu vrednost napona $v_{g \min}$ koja se može detektovati na ulazu pojačavača.
- e) Ako je $V_{gm} = V_m \sin(2\pi ft)$, $f = 10 \text{ kHz}$, $V_m = 10 \text{ mV}$, odrediti odnos signal šum na ulazu pojačavača.



Slika 5a.

Rešenje:

a) Na slici 5a su prikazani svi generatori šuma u kolu. Spektralna gustina snage izlaznog napona je

$$v_{nC}^2 = e_{R_C}^2 + \left(\frac{g_m R_C r_\pi}{r_\pi + R_g + r_b} \right)^2 (e_{R_g}^2 + e_{R_b}^2 + e_i^2) + \left((r_\pi \parallel (R_g + r_b)) g_m R_C \right)^2 i_i^2$$

odakle se dobija da je spektralna gustina snage ekvivalentnog naponskog generatora na ulazu

$$e_{i,tot}^2 = \frac{v_{nC}^2}{a_v^2}, a_v = \frac{r_\pi}{r_\pi + R_g + r_b} g_m R_C.$$

Na osnovu prethodnog se dobija

$$e_{i,tot}^2 = \frac{e_{R_C}^2}{a_v^2} + e_{R_g}^2 + e_{R_b}^2 + e_i^2 + R_g^2 i_i^2 \approx e_{R_g}^2 + e_{R_b}^2 + e_i^2 + R_g^2 i_i^2,$$

odakle je

$$e_{i,tot}^2 \approx 4kT(R_g + r_b) + \frac{2kT}{g_m} + 2qI_B(R_g + r_b)^2 = 4kT(R_g + r_b) + \frac{2kT}{g_m} + \frac{2kTg_m}{\beta_F}(R_g + r_b)^2,$$

odnosno

$$e_{i,tot}^2 \approx 4kT \left[R_g + r_b + \frac{1}{2g_m} + \frac{g_m}{2\beta_F}(R_g + r_b)^2 \right].$$

b) Minimalna vrednost napona šuma na ulazu dobija se iz uslova

$$\frac{de_{i,tot}^2}{dg_m} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2g_m^2} + \frac{1}{2\beta_F}(R_g + r_b)^2 = 0,$$

odakle je

$$g_m = g_{m,opt} = \frac{\sqrt{\beta_F}}{R_g + r_b} \Rightarrow I_0 = I_{0,opt} = \frac{V_t}{R_g + r_b} \sqrt{\beta_F} = 642,5 \mu\text{A}.$$

Spektralna gustina snage ekvivalentnog naponskog generatora šuma na ulazu pojačavača je

$$e_{i,tot}^2 \approx 4kT \left[R_g + r_b + \frac{R_g + r_b}{\sqrt{\beta_F}} \right] = 7 \cdot 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

c) Ekvivalentni propusni opseg termičkog šuma je

$$f_N = \frac{1}{4R_C C_L} = 2,5 \text{ MHz},$$

tako da je efektivna vrednost napona šuma na ulazu

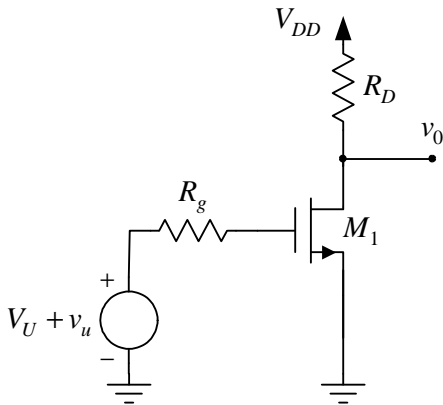
$$V_{ni} = \sqrt{e_{i,tot}^2 f_N} = 4,2 \mu\text{V}.$$

d) Minimalna vrednost napona koja se može detektovati određena je nivoom šuma na njegovom ulazu

$$V_{g \min} = V_{ni} = 4,2 \mu\text{V}.$$

e) Odnos signal šum na ulazu pojačavača je

$$SNR = 20 \log \frac{V_{g,rms}}{V_{ni}} = 20 \log \frac{V_m / \sqrt{2}}{V_{ni}} = 149 \text{ dB}.$$



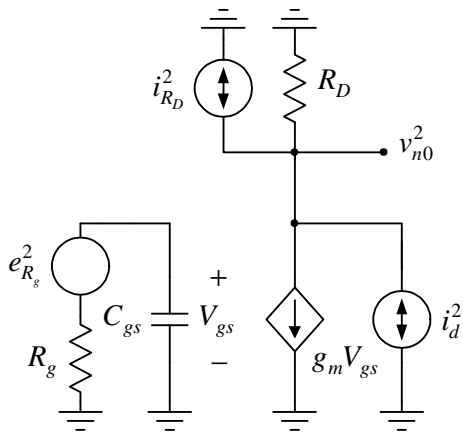
Slika 6.

6. Za pojačavač sa slike 6 je poznato: koeficijent flicker šuma $K_f = 3 \cdot 10^{-24} \text{ FV}^2$, $I_D = 100 \mu\text{A}$, $C_{ox} = 4,3 \text{ fF}/\mu\text{m}^2$, $W = 100 \mu\text{m}$, $L = 1 \mu\text{m}$, $\mu_n C_{ox} = 200 \mu\text{A}/\text{V}^2$, $R_g = 10 \text{ k}\Omega$, $R_D = 10 \text{ k}\Omega$ i $4kT = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$. Odrediti spektralnu gustinu snage ekvivalentnog naponskog generatora šuma na izlazu i ulazu pojačavača na učestanosti:

- a) $f = 100 \text{ Hz}$ i
b) $f = 100 \text{ kHz}$.

Rešenje:

Na slici 6a je prikazana ekvivalentna šema pojačavača za male signale u kojoj su uračunati uticaji svih generatora šuma u kolu.



Slika 6a.

Prema slici 6a je

$$i_d^2 = \frac{8kT}{3} g_m + g_m^2 \frac{K_f}{WLC_{ox}f}, \quad i_{R_D}^2 = \frac{4kT}{R_D} \quad \text{i} \quad e_{R_g}^2 = 4kTR_g.$$

Spektralna gustina snage šuma na izlazu pojačavača je

$$v_{n0}^2 = R_D^2 \left(i_d^2 + i_{R_D}^2 + \frac{g_m^2}{1 + (2\pi f C_{gs} R_g)^2} e_{R_g}^2 \right),$$

gde su

$$g_m = \sqrt{2I_D \mu_n C_{ox} W / L} = 2 \text{ mS} \quad \text{i} \quad C_{gs} = \frac{2}{3} WLC_{ox} = 287 \text{ fF}.$$

a) Kada je $f = 100 \text{ Hz}$, spektralne gustine snage su:

$$i_d^2 = \frac{8kT}{3} g_m + g_m^2 \frac{K_f}{WLC_{ox}f} = 2,79 \cdot 10^{-19} \text{ A}^2/\text{Hz}, \quad i_{R_D}^2 = \frac{4kT}{R_D} = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ A}^2/\text{Hz},$$

$$e_{R_g}^2 = 4kTR_g = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ V}^2/\text{Hz} \quad \text{i} \quad \frac{g_m^2}{1 + (2\pi f C_{gs} R_g)^2} e_{R_g}^2 = 6,4 \cdot 10^{-22} \text{ A}^2/\text{Hz},$$

odakle se dobija

$$v_{n0}^2 = R_D^2 \left(i_d^2 + i_{R_D}^2 + \frac{g_m^2}{1 + (2\pi f C_{gs} R_g)^2} e_{R_g}^2 \right) = 27,9 \cdot 10^{-12} \text{ V}^2/\text{Hz},$$

odnosno

$$e_{i,tot}^2 = \frac{v_{n0}^2}{|a_v|^2} \approx \frac{v_{n0}^2}{g_m^2 R_D^2} = 7 \cdot 10^{-14} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

b) Kada je $f = 100 \text{ kHz}$, spektralne gustine snage su

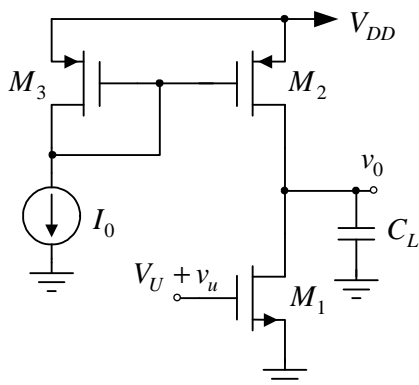
$$i_d^2 = \frac{8kT}{3} g_m + g_m^2 \frac{K_f}{WLC_{ox}f} = 3 \cdot 10^{-22} \text{ A}^2/\text{Hz} \quad \text{i} \quad \frac{g_m^2}{1 + (2\pi f C_{gs} R_g)^2} e_{R_g}^2 = 6,4 \cdot 10^{-22} \text{ A}^2/\text{Hz},$$

odakle se dobija

$$v_{n0}^2 = R_D^2 \left(i_d^2 + i_{R_D}^2 + \frac{g_m^2}{1 + (2\pi f C_{gs} R_g)^2} e_{R_g}^2 \right) = 94,2 \cdot 10^{-15} \text{ V}^2/\text{Hz},$$

odnosno

$$e_{i,tot}^2 = \frac{v_{n0}^2}{|a_v|^2} \approx \frac{v_{n0}^2}{g_m^2 R_D^2} = 2,36 \cdot 10^{-16} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$



Slika 7.

7. U kolu sa slike 7 svi tranzistori imaju isti odnos širine i dužine kanala $W/L = 10 \mu\text{m}/1 \mu\text{m}$, koeficijenti flicker šuma su $K_{fN} = 2K_{fP} = 10^{-24} \text{ V}^2\text{F}$, dok je: $I_0 = 100 \mu\text{A}$, $\mu_n C_{ox} = 110 \mu\text{A}/\text{V}^2$, $\mu_p C_{ox} = 50 \mu\text{A}/\text{V}^2$, $C_{ox} = 2 \text{ fF}/\mu\text{m}^2$, $\lambda_n = 0,04 \text{ V}^{-1}$, $\lambda_p = 0,05 \text{ V}^{-1}$, $C_L = 500 \text{ fF}$ i $4kT = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$.

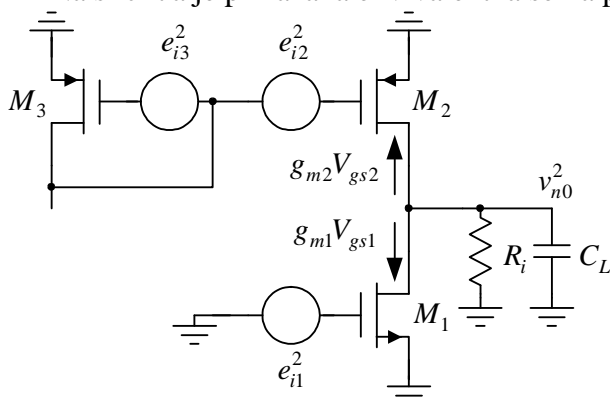
- Odrediti spektralnu gustinu snage ekvivalentnog naponskog generatora šuma na ulazu pojačavača $e_{i,tot}^2$ na učestanostima na kojima je dominantan termički šum.
- Odrediti spektralnu gustinu snage ekvivalentnog naponskog generatora šuma na ulazu pojačavača $e_{i,tot}^2$ na učestanosti

$f = 1 \text{ kHz}$.

- Odrediti graničnu učestanost f_C na kojoj su uticaji termičkog i flicker šuma podjednaki.
- Odrediti efektivnu vrednost napona šuma na ulazu pojačavača u opsegu učestanosti od 0,1 Hz do 10 kHz.

Rešenje:

Na slici 7a je prikazana ekvivalentna šema pojačavača iz koje se određuje uticaj šuma.



Slika 7a.

Prema ovoj slici, spektralna gustina snage napona šuma na izlazu pojačavača je

$$v_{n0}^2(f) = i_{n0}^2(f) |Z_0(jf)|^2,$$

$$i_{n0}^2(f) = e_{i1}^2(f) g_{m1}^2 + e_{i2}^2(f) g_{m2}^2 + e_{i3}^2(f) g_{m2}^2,$$

$$Z_0(jf) = R_i \parallel \frac{1}{j2\pi f C_L}, \quad R_i = \frac{1}{g_{ds1} + g_{ds2}}.$$

Na osnovu prethodnog spektralna gustina snage ekvivalentnog naponskog generatora šuma na ulazu pojačavača je

$$e_i^2(f) = \frac{v_{n0}^2(f)}{|A(jf)|^2}, \quad A(jf) = g_{m1} Z_0(jf),$$

odakle se dobija

$$e_i^2(f) = e_{i1}^2(f) + (e_{i2}^2(f) + e_{i3}^2(f)) \frac{g_{m2}^2}{g_{m1}^2} = e_{i1}^2(f) \left(1 + 2 \frac{e_{i2}^2(f)}{e_{i1}^2(f)} \frac{g_{m2}^2}{g_{m1}^2} \right), \quad e_{i2}^2(f) = e_{i3}^2(f).$$

- Kada je dominantan termički šum tada je

$$e_{i1}^2(f) = \frac{8kT}{3g_{m1}} \quad \text{i} \quad e_{i2}^2(f) = \frac{8kT}{3g_{m2}},$$

a posle smene postaje

$$e_i^2(f) = e_{i1}^2(f) \left(1 + 2 \frac{g_{m2}}{g_{m1}} \right).$$

Budući da je

$$g_{m1} = \sqrt{2I_0 \mu_n C_{ox} (W/L)_1} \quad \text{i} \quad g_{m2} = \sqrt{2I_0 \mu_p C_{ox} (W/L)_2},$$

prethodni izraz se svodi na

$$e_i^2(f) = \frac{8kT}{3g_{m1}} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{\mu_p (W/L)_2}{\mu_n (W/L)_1}} \right) = 3,81 \cdot 10^{-17} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

b) Kada je dominantan flicker šum tada je

$$e_i^2(f) = e_{i1}^2(f) \left(1 + 2 \frac{e_{i2}^2(f)}{e_{i1}^2(f)} \frac{g_{m2}^2}{g_{m1}^2} \right) = e_{i1}^2(f) \left(1 + 2 \frac{\frac{K_{fP}}{W_2 L_2 C_{ox} f} \mu_p W_2 L_1}{\frac{K_{fN}}{W_1 L_1 C_{ox} f} \mu_n L_2 W_1} \right),$$

odakle se dobija

$$e_i^2(f) = e_{i1}^2(f) \left(1 + 2 \frac{K_{fP} \mu_p}{K_{fN} \mu_n} \right) = \frac{K_{fN}}{W_1 L_1 C_{ox} f} \left(1 + 2 \frac{K_{fP} \mu_p}{K_{fN} \mu_n} \right) = \frac{1,45 K_{fN}}{W_1 L_1 C_{ox} f} = 7,25 \cdot 10^{-14} \text{ V}^2/\text{Hz}.$$

c) Učestanost na kojoj su spektralne gustine snage termičkog i flicker šuma jednake dobija se iz uslova

$$\frac{8kT}{3g_{m1}} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{\mu_p (W/L)_2}{\mu_n (W/L)_1}} \right) = \frac{K_{fN}}{W_1 L_1 C_{ox} f_C} \left(1 + 2 \frac{K_{fP} \mu_p}{K_{fN} \mu_n} \right),$$

odakle je

$$f_C = 1,9 \text{ MHz}.$$

d) Ekvivalentni propusni opseg termičkog šuma je

$$f_N = \frac{1}{4R_i C_L} = \frac{g_{ds1} + g_{ds2}}{4C_L} = 4,5 \text{ MHz},$$

pa je

$$V_{ni} \approx \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} e_i^2(f) df} = \sqrt{\frac{1,45 K_{fN}}{W_1 L_1 C_{ox}} \ln \left(\frac{f_2}{f_1} \right)} = 0,9 \mu\text{V}.$$

...