

BODEOVE FREKVENTNE KARAKTERISTIKE

Funkcija prenosa pojačavača se može predstaviti pomoću kompleksne funkcije sa realnim koeficijentima sa:

- nulama u levoj i desnoj poluravni kompleksne učestanosti
- polovima u levoj poluravni kompleksne učestanosti
- polovima na imaginarnoj osi
- konjugovano-kompleksnim polovima u levoj poluravni kompleksne učestanosti.

Funkcija prenosa u napred opisanim slučajevima se može predstaviti kao:

$$G(s) = \frac{K \cdot (1 + sT_1) \cdot (1 + sT_2)^p \dots}{s^r \cdot (1 + sT_a) \cdot (1 + 2T_b\zeta_b s + T_b^2 s^2) \dots}$$

Funkcija prenosa za pobudu prostoperiodičnim signalom $s = j\omega$ je:

$$G(j\omega) = \frac{K \cdot (1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2)^p \dots}{(j\omega)^r \cdot (1 + j\omega T_a) \cdot (1 + 2T_b\zeta_b j\omega + T_b^2 (j\omega)^2) \dots}$$

Amplitudska karakteristika funkcije prenosa predstavlja promenu amplitude (modula) funkcije prenosa u zavisnosti od učestanosti i obično se izražava u decibelima [dB]:

$$|G(j\omega)| = \frac{K \cdot |1 + j\omega T_1| \cdot |1 + j\omega T_2|^p \dots}{\omega^r \cdot |1 + j\omega T_a| \cdot |1 + 2T_b\zeta_b j\omega + T_b^2 (j\omega)^2| \dots}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K / \omega^r) + 20 \log |1 + j\omega T_1| + p 20 \log |1 + j\omega T_2| + \dots \\ - 20 \log |1 + j\omega T_a| - 20 \log |1 + 2T_b\zeta_b j\omega + T_b^2 (j\omega)^2| - \dots$$

Dakle, crtanje amplitudske karakteristike funkcije prenosa se svodi na grafičko sabiranje parcijalnih amplitudskih karakteristika (pol na imaginarnoj osi, nula ili pol na realnoj osi i konjugovano-kompleksni polovi).

Fazna karakteristika funkcije prenosa predstavlja promenu argumenta (faze) funkcije prenosa u zavisnosti od učestanosti i izražava se u stepenima ili radijanima:

$$\arg G(j\omega) = \arg(K / \omega^r) + \arg(1 + j\omega T_1) + p \arg(1 + j\omega T_2) + \dots$$

$$- \arg(1 + j\omega T_a) - \arg(1 + 2T_b\zeta_b j\omega + T_b^2 (j\omega)^2) - \dots$$

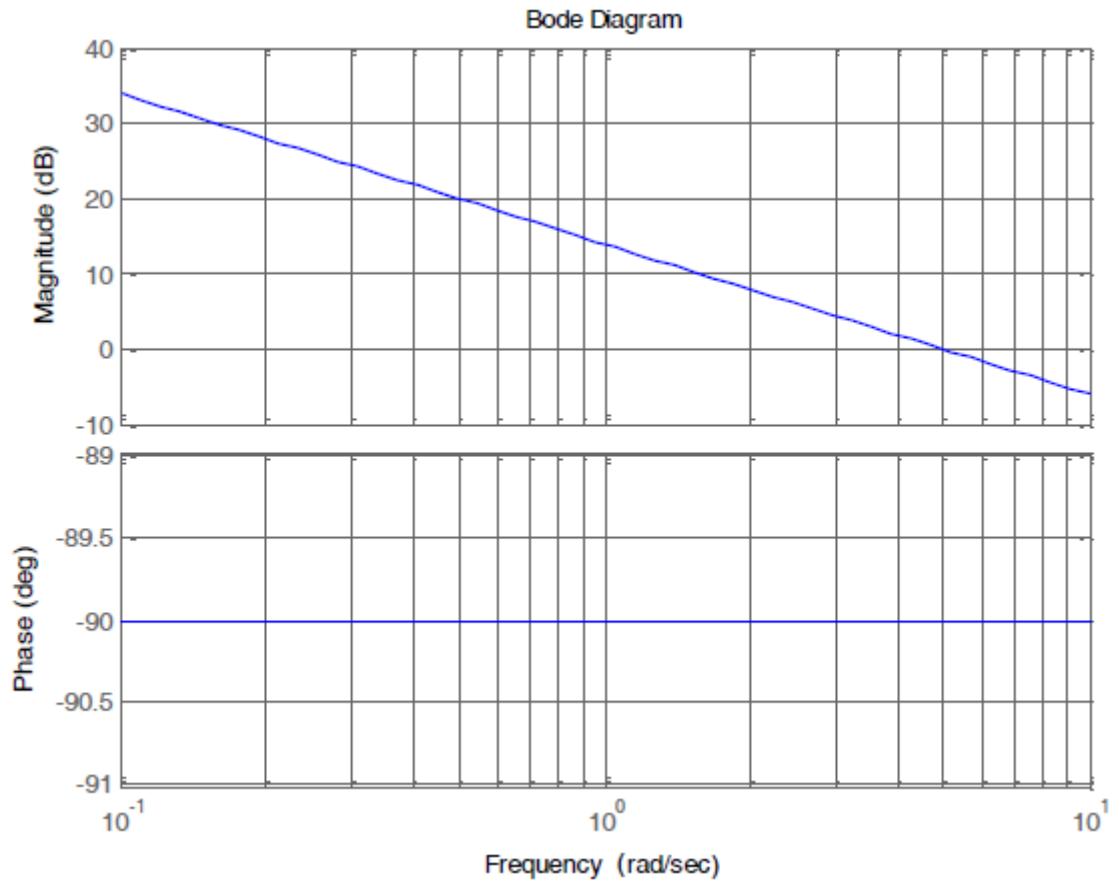
$$\arg G(j\omega) = \arctg(\omega T_1) + p \arctg(\omega T_2) + \dots$$

$$- r \cdot 90^\circ - \arctg(\omega T_a) - \arctg \frac{2T_b\zeta_b\omega}{1 - T_b^2\omega^2} - \dots$$

Dakle, crtanje fazne karakteristike funkcije prenosa se svodi na grafičko sabiranje parcijalnih faznih karakteristika (pol na imaginarnoj osi, nula ili pol na realnoj osi i konjugovano-kompleksni polovi).

POL NA IMAGINARNOJ OSI

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^r}$$



Parcijalna amplitudska karakteristika (Magnitude) je:

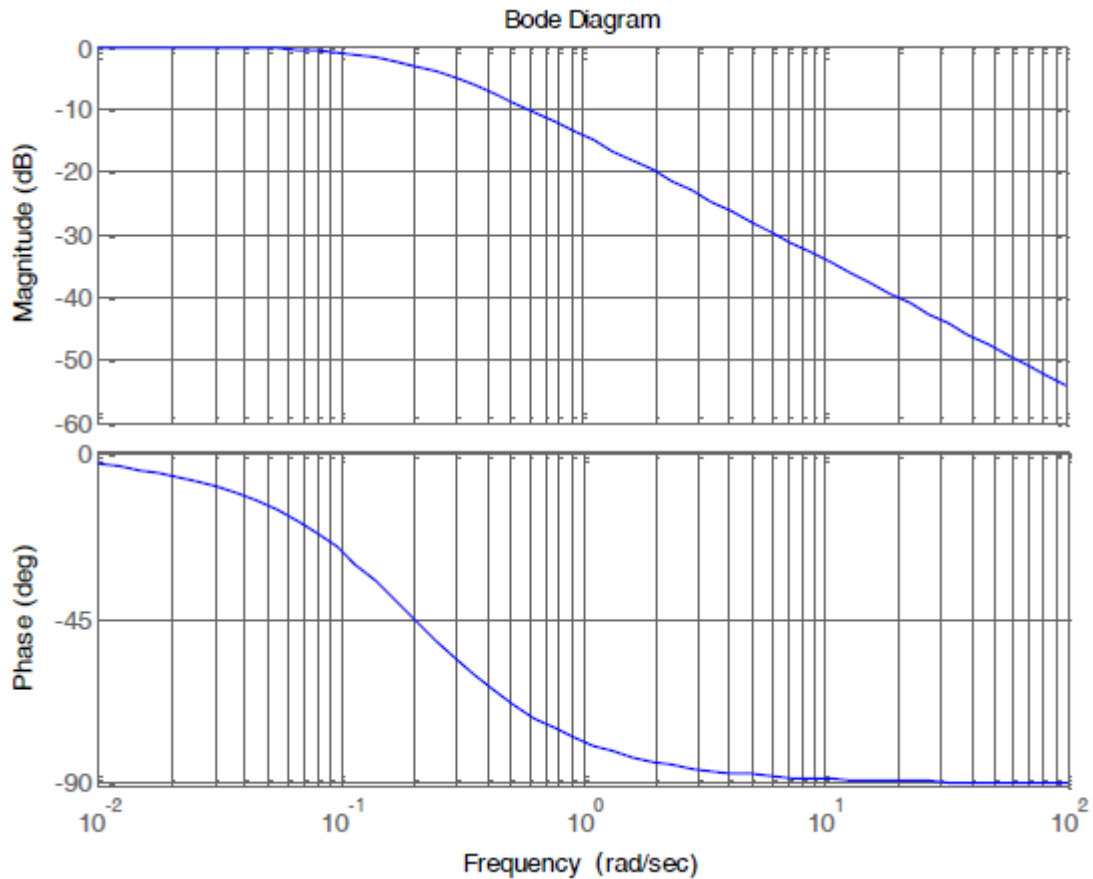
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - r \cdot 20 \log \omega$$

Parcijalna fazna karakteristika (Phase) je:

$$\arg G(j\omega) = -r \cdot 90^\circ$$

POL NA REALNOJ OSI

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



Parcijalna amplitudska karakteristika (Magnitude) je:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Bodeova aproksimacija parcijalne amplitudske karakteristike je:

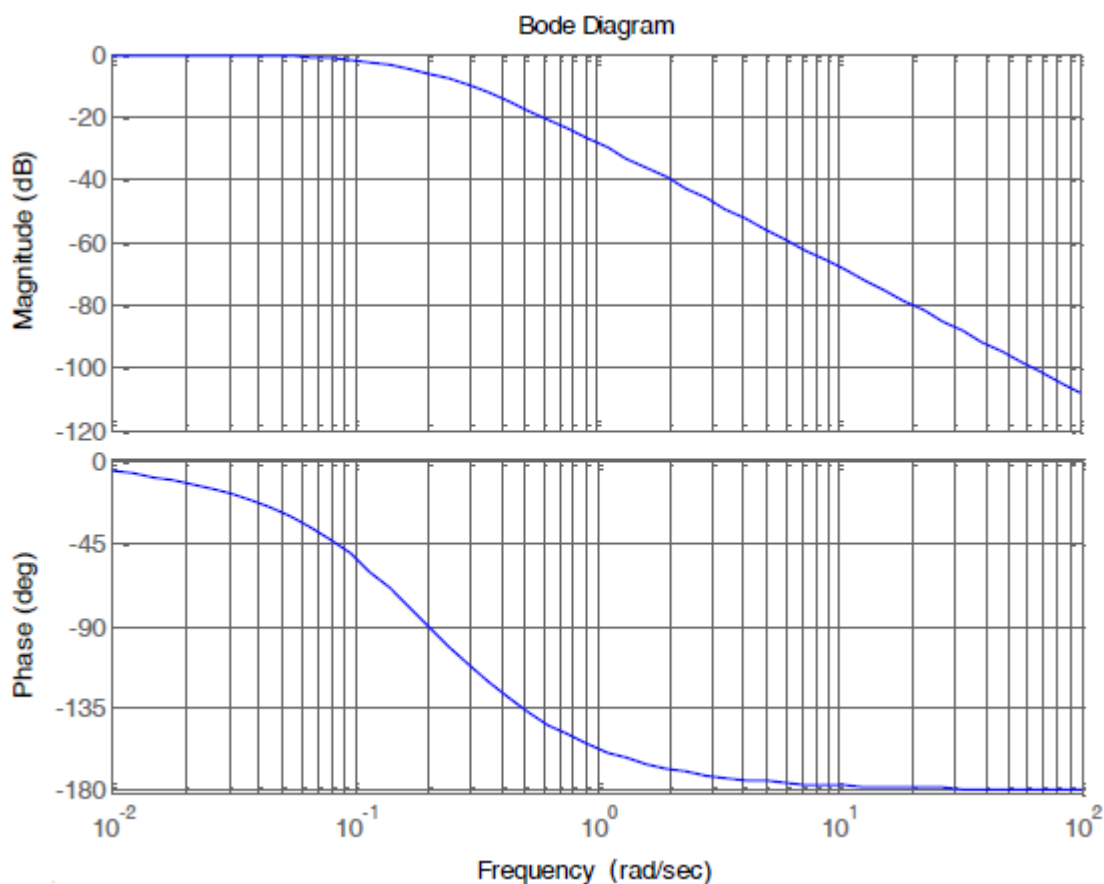
$$|G(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega T \ll 1 \\ -20 \log \omega T = 20 \log \frac{1}{T} - 20 \log \omega, & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

Parcijalna fazna karakteristika (Phase) je:

$$\arg G(j\omega) = -\arctg \omega T$$

KONJUGOVANO-KOMPLEKSNI POLOVI BEZ OSCILATORNOG ODZIVA

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2T_b\zeta_b j\omega + T_b^2(j\omega)^2}$$



Parcijalna amplitudska karakteristika (Magnitude) je:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}$$

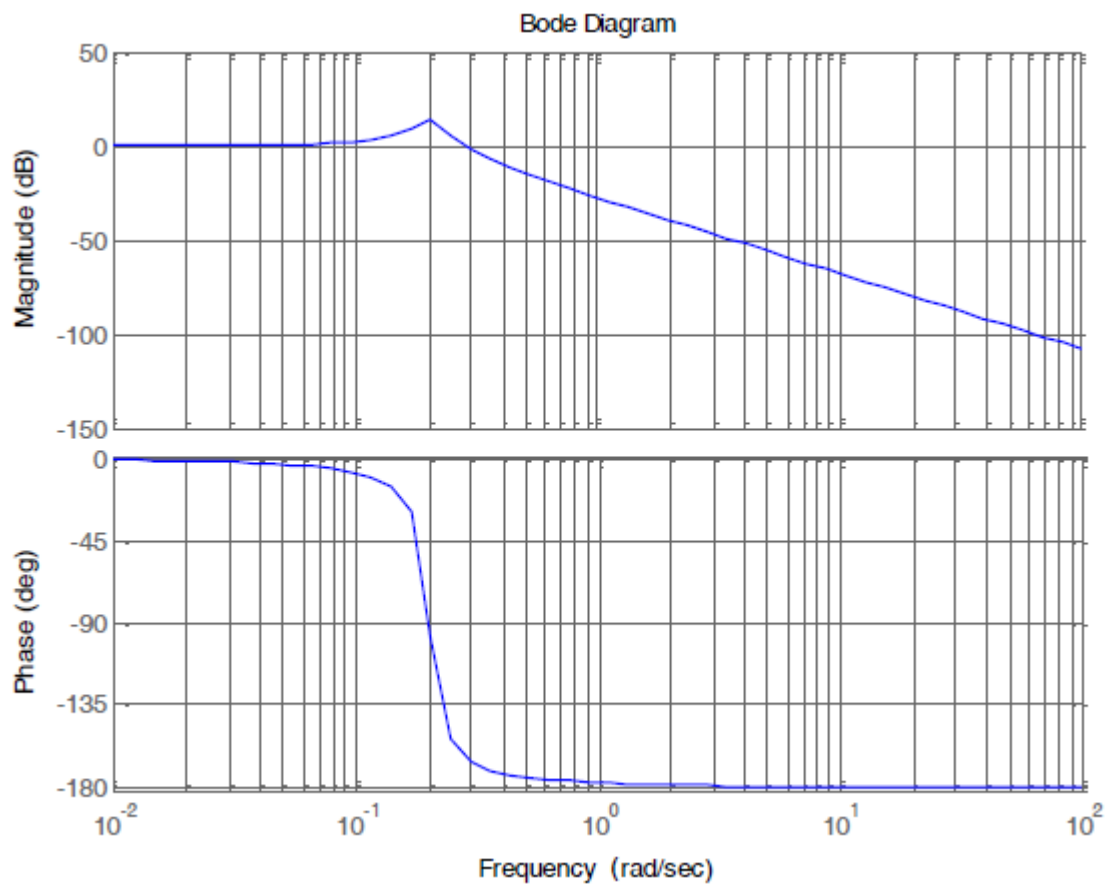
Bodeova aproksimacija parcijalne amplitudske karakteristike je:

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega T \ll 1 \\ -20 \log \omega^2 T^2 = 40 \log \frac{1}{T} - 40 \log \omega, & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

Parcijalna fazna karakteristika (Phase) je:

$$\arg G(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

KONJUGOVANO-KOMPLEKSNI POLOVI SA OSCILATORNIM ODZIVOM



Formule za konjugovano-kompleksne polove sa oscilatornim odzivom imaju samo manji faktor ζ od formula za konjugovano-kompleksne polove bez oscilatornog odziva.

BODEOVE APROKSIMATIVNE FREKVENTNE KARAKTERISTIKE

Ukoliko pojačavač nema polove na imaginarnoj osi, niti konjugovano-kompleksne polove, crtanje frekventnih karakteristika se pojednostavljuje:

$$A(s) = \frac{V_i(s)}{V_g(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} \Rightarrow A(s) = K \left(\prod_{i=1}^m (s - s_{Zi}) / \prod_{k=1}^n (s - s_{Pk}) \right)$$

Funkcija prenosa za pobudu prostoperiodičnim signalom $s = j\omega$ postaje:

$$A(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - s_{Zi})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{Pk})} = A_0 \frac{\prod_{i=1}^m (1 - j\omega / s_{Zi})}{\prod_{k=1}^n (1 - j\omega / s_{Pk})}$$

Nule na realnoj osi u levoj poluravni kompleksne učestanosti su:

$$s_{Zi} = -\omega_{Zi}$$

Polovi na realnoj osi u levoj poluravni kompleksne učestanosti su:

$$s_{Pi} = -\omega_{Pi}$$

Funkcija prenosa za pobudu prostoperiodičnim signalom $s = j\omega$, nulama i polovima na realnoj osi u levoj poluravni kompleksne učestanosti postaje:

$$A(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega + \omega_{Zi})}{\prod_{k=1}^n (j\omega + \omega_{Pk})} = A_0 \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\omega / \omega_{Zi})}{\prod_{k=1}^n (1 + j\omega / \omega_{Pk})}$$

BODEOVA APROKSIMACIJA AMPLITUDSKE KARAKTERISTIKE

Amplitudska karakteristika funkcije prenosa se izračunava kao moduo funkcije prenosa i obično se izražava u decibelima [dB]:

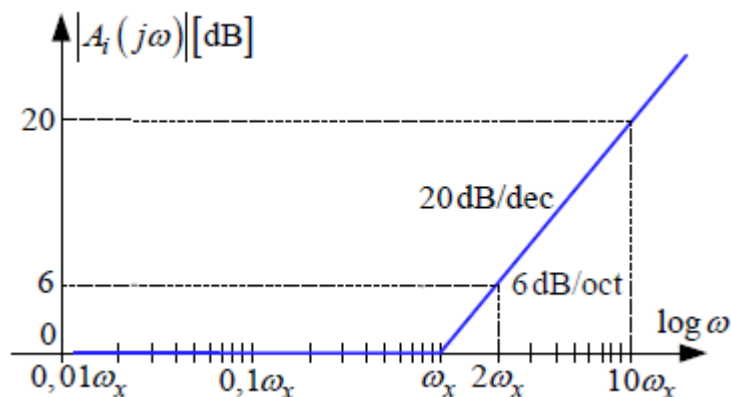
$$|A(j\omega)| = |K| \sqrt{\prod_{i=1}^m (\omega^2 + \omega_{Zi}^2) / \prod_{k=1}^n (\omega^2 + \omega_{Pk}^2)} = |A_0| \sqrt{\prod_{i=1}^m (1 + (\omega/\omega_{Zi})^2) / \prod_{k=1}^n (1 + (\omega/\omega_{Pk})^2)}$$

$$|A(j\omega)|[\text{dB}] = 20 \log |A_0| + \sum_{i=1}^m 20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_{Zi})^2} - \sum_{k=1}^n 20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_{Pk})^2}$$

Bodeova aproksimacija parcijalne amplitudske karakteristike nule na realnoj osi je:

$$|A_{x,k}(j\omega)|[\text{dB}] = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{x,x=Z,P}}\right)^2} = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_x \\ 20 \log(\omega/\omega_x), & \omega \geq \omega_x \end{cases}$$

Dijagram Bodeove aproksimacije parcijalne amplitudske karakteristike nule na realnoj osi je:



Najveća greška Bodeove aproksimacije parcijalne amplitudske karakteristike nule na realnoj osi je na učestanosti ω_x i to $3 \text{ dB} = 20 \log \sqrt{2}$.

Dakle, crtanje amplitudske karakteristike funkcije prenosa se svodi na grafičko sabiranje parcijalnih amplitudskih karakteristika konstante i nula na realnoj osi, i grafičko oduzimanje parcijalnih amplitudskih karakteristika polova na realnoj osi.

BODEOVA APROKSIMACIJA FAZNE KARAKTERISTIKE

Fazna karakteristika funkcije prenosa se izračunava kao argument funkcije prenosa u stepenima ili radijanima:

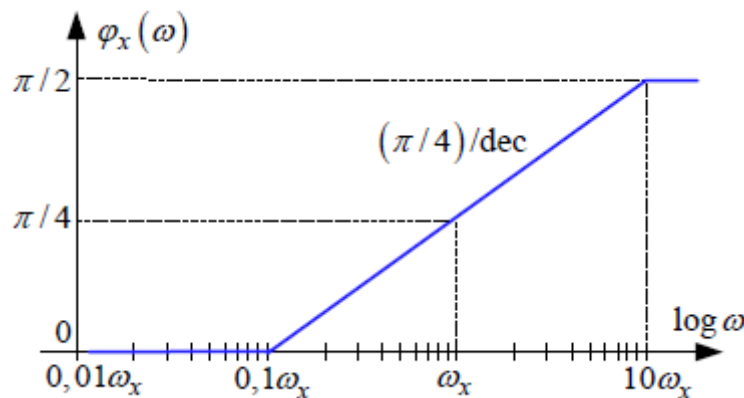
$$\varphi(\omega) = \arg(A(j\omega)) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(A(j\omega))}{\operatorname{Re}(A(j\omega))} = \arg(A_0) + \sum_{i=1}^m \operatorname{arctg}(\omega/\omega_{Zi}) - \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg}(\omega/\omega_{Pk})$$

$$\varphi(\omega) = \arg(K) + \sum_{i=1}^m \operatorname{arctg}(\omega/\omega_{Zi}) - \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg}(\omega/\omega_{Pk})$$

Bodeova aproksimacija parcijalne fazne karakteristike nule na realnoj osi je:

$$\varphi_x(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_{x,x=Z,P}} = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_x/10 \\ \frac{\pi}{4}(1 + \log(\omega/\omega_x)), & \omega_x/10 \leq \omega \leq 10\omega_x \\ \pi/2, & \omega \geq 10\omega_x \end{cases}$$

Dijagram Bodeove aproksimacije parcijalne fazne karakteristike nule na realnoj osi je:



Najveća greška Bodeove aproksimacije parcijalne fazne karakteristike nule na realnoj osi je na učestanostima $0,1\omega_x$ i $10\omega_x$, i to svega 5.7° .

Dakle, crtanje fazne karakteristike funkcije prenosa se svodi na grafičko sabiranje parcijalnih faznih karakteristika konstante i nula na realnoj osi, i grafičko oduzimanje parcijalnih faznih karakteristika polova na realnoj osi.