

Veza između margine faze i Q-faktora para polova

Predrag Pejović

22. april 2013

1 Barkhauzenov kriterijum

Barkhauzenov uslov „samopobuđivanja“ oscilatora [1] se odnosi na linearne sisteme i zasnovan je na predstavi pojačavača kome se signal sa izlaza preko funkcije prenosa β -mreže, $\beta(s)$, dovodi na ulaz. Ako je funkcija prenosa pojačavača $A(s)$, kako bi se pojačavač „samopobuđivao“ na frekvenciji $s = j\omega_x$ treba da važi

$$\beta(j\omega_x) A(j\omega_x) = 1 + j0.$$

U tom slučaju je povratni signal jednak pobudnom signalu, te se pojačavač „samopobuđuje“ sa sopstvenog izlaza. Kako je pretpostavljeno da gornji uslov važi za $s = j\omega_x$, sistem osciluje na kružnoj frekvenciji ω_x sa amplitudom koju nije moguće odrediti u okviru teorije linearnih sistema, i koja bi u slučaju hipotetičkog apsolutno linearnog sistema bila određena početnim uslovima u sistemu. Stoga se gornji uslov naziva još i Barkhauzenov kriterijum oscilovanja. Kriterijum je jednostavan i intuitivan, a od posebne važnosti je to što uvodi pojam kružnog pojačanja

$$T_b(s) \triangleq \beta(s) A(s)$$

koje na frekvenciji oscilovanja ω_x treba da bude jednako $1 + j0$,

$$T_b(j\omega_x) = 1 + j0.$$

Formalno izvođenje Barkhauzenovog kriterijuma je takođe jednostavno, i ono polazi od funkcije prenosa sistema u zatvorenoj sprezi

$$H(s) \triangleq \frac{T(s)}{1 + T(s)}.$$

Ovde valja imati na umu da sistemi praćenja koji se analiziraju u teoriji sistema automatskog upravljanja podrazumevaju negativnu povratnu spregu i invertujući ulaz za povratni signal kod sabirača ulaznog signala i povratnog signala, pa je

$$T(s) = -T_b(s)$$

Ako je

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

gde su $N(s)$ i $D(s)$ polinomi po s sa realnim koeficijentima, tada je

$$H(s) = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

i sistem ima polove za

$$D(s) + N(s) = 0$$

gde je $D(s) + N(s)$ karakteristični polinom sistema u zatvorenoj sprezi.

Kako je po Barkhauzenovom kriterijumu imajući u vidu $T(s) = -T_b(s)$

$$T(s) = -1 + j0$$

za $s = \pm j\omega_x$, direktno sledi

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -1 + j0$$

odakle je

$$D(s) + N(s) = 0$$

na $s = \pm j\omega_x$. Dakle, Barkhauzenov kriterijum je uslov da sistem u zatvorenoj sprezi ima polove na $\pm j\omega_x$ izražen u terminima kružnog pojačanja. Tačku $-1 + j0$ ćemo u daljem tekstu zvati „Barkhauzenova tačka“, iako to nije opšte prihvaćen termin.

Barkhauzenov kriterijum se može generalizovati na stav da polovi sistema u zatvorenoj sprezi, koji su nule karakterističnog polinoma

$$D(s) + N(s) = 0$$

odgovaraju vrednosti kružnog pojačanja

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = -1 + j0.$$

2 Osvrt na Nikvistov kriterijum

Iako je Barkhauzenov kriterijum intuitivan i jasan, podložan je pogrešnim generalizacijama. Naime, Barkhauzenov kriterijum izražava u terminima kružnog pojačanja kada je sistem granično stabilan, ali ne govori o tome da li je sistem stabilan ili nestabilan [3]. Osnovna greška u rezonovanju kod takvih generalizacija je u poređenju kompleksnih brojeva, poput uvođenja pojmova da je kružno pojačanje veće li manje od neke vrednosti, pri čemu je kružno pojačanje za određenu kompleksnu frekvenciju s kompleksan broj. Polje kompleksnih brojeva nije moguće urediti [4], pa poređenje kompleksnih brojeva nema nikakv smisao.

Odgovor na pitanje stabilnosti sistema u zatvorenoj sprezi na osnovu analize sistema u otvorenoj sprezi daje Nikvistov kriterijum, kome je Barkhauzenov kriterijum granični slučaj. Po Nikvistovom kriterijum je sistem stabilan ako kriva $(\Re(T(j\omega)), \Im(T(j\omega)))$ za $-\infty < \omega < \infty$ ne obuhvata Barkhauzenovu tačku, a nestabilan u suprotnom. Ovaj stav važi u slučaju da je sistem u otvorenoj sprezi stabilan, odnosno da $D(s)$ nema nula u desnoj kompleksnoj poluravni. Razmatrana kriva je polarni dijagram frekvencijske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi. Ako kriva sadrži Barkhauzenovu tačku, onda je sistem granično stabilan, što Barkhauzenov kriterijum i tvrdi.

3 Veza između margine faze i Q -faktora sistema u zatvorenoj sprezi

Udaljenost frekvencijske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi od Barkhauzenove tačke se najčešće karakteriše preko margine faze. Pre definisanja margine faze treba definisati kružnu frekvenciju jediničnog pojačanja, a to je ono ω_c za koje važi

$$|T(j\omega_c)| = 1.$$

Kada je određeno $\omega_c C$, margina faze se definiše kao

$$\varphi_m = \pi + \arg(T(j\omega_c)).$$

Ovako definisana margina faze je geometrijska mera udaljenosti Barkhauzenove tačke od nikvistovog dijagrama razmatranog sistema u otvorenoj sprezi.

Pitanje koje se prirodno nameće je kolika margina faze treba da bude? Na primeru sistema koji ima funkciju prenosa u otvorenoj sprezi oblika

$$T(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

ćemo povezati kružnu frekvenciju jediničnog pojačanja i marginu faze, koje je karakteristike sistema u otvorenoj sprezi, sa Q -faktorom i kružnom frekvencijom polova u zatvorenoj sprezi. Razmatrani sistem ima praktičan značaj jer predstavlja sistem sa jednopolnom funkcijom prenosa (pol na $s = -\omega_2$) i integralnim regulatorom koji obezbeđuje nultu grešku stacionarnog stanja.

Funkcija prenosa razmatranog sistema u zatvorenoj sprezi je

$$H(s) = \frac{T(s)}{1 + T(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0 \omega_2}} = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q_p \omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}.$$

Izjednačavanjem međusobno odgovarajućih članova se dobija

$$\omega_p^2 = \omega_0 \omega_2$$

i

$$Q_p \omega_p = \omega_0$$

odakle je

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0 \omega_2}$$

i

$$Q_p = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_2}}.$$

Sistem u otvorenoj sprezi ima jedinično pojačanje za $|T(j\omega_c)| = 1$, kada je

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2} = 1$$

što je bikvadratna jednačina po ω_c . Rešavanjem jednačine se dobija

$$\omega_c^2 = \frac{\omega_2^2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}}\right)$$

što se može svesti na

$$\omega_c^2 = \frac{2 \omega_0^2}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}}}$$

i dalje na

$$\omega_c^2 = \frac{2 \omega_p^2 Q_p^2}{1 + \sqrt{1 + 4 Q_p^4}}.$$

Ovo daje korisnu vezu između ω_c i ω_p

$$\frac{\omega_c}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2Q_p^2}{1 + \sqrt{1 + 4Q_p^4}}}$$

Margina faze sistema je

$$\varphi_m = \pi + \arg T(j\omega_c)$$

što se svodi na

$$\varphi_m = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2}$$

Kako je

$$\tan \varphi_m = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2} \right) = \frac{\omega_2}{\omega_c}$$

dobija se

$$\varphi_m = \arctan \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^2}}{2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^2}}$$

što se zamenom $\left(\frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^2 = Q_p^4$ svodi na

$$\varphi_m = \arctan \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4Q_p^4}}{2Q_p^4}}$$

Gornja jednačina se može invertovati kako bi se dobila zavisnost $Q_p(\varphi_m)$

$$Q_p = \frac{\sqrt{\cos \varphi_m}}{\sin \varphi_m}$$

Jednačine koje povezuju karakteristike sistema u otvorenoj sprezi sa karakteristikama sistema u zatvorenoj sprezi se dalje pojednostavljaju primenom izraza za ω_c/ω_p i zavisnosti $\varphi_m(Q_p)$ na

$$\omega_c \tan \varphi_m = \frac{\omega_p}{Q_p}$$

Daljom zamenom $Q_p(\varphi_m)$ se dobija

$$\omega_p = \frac{\omega_c}{\sqrt{\cos \varphi_m}}$$

Dobijene veze su od značaja za projektovanje kompenzatora, ali strogo važe samo za sistem sa inicijalno pretpostavljenom funkcijom prenosa u otvorenoj sprezi $T(s)$.

4 Vremenski odziv sistema u zatvorenoj sprezi

$$F_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

$$f_1(t) = 1 - e^{-\omega_p t}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q_p \omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}} = \frac{\omega_p^2}{s^2 + 2\zeta \omega_p s + \omega_p^2}$$

$$f_2(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_p t} \left(\cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_p t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_p t\right) \right)$$

$$F_{2a}(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}} = \frac{\omega_p^2}{s^2 + 2\omega_p s + \omega_p^2}$$

$$f_{2a}(t) = 1 - (1 + \omega_p t) e^{-\omega_p t}$$

5 Primeri

U cilju ilustriranja teorijski izvedenih zaključaka, analiziraćemo dva sistema kod kojih je izborom parametara podešeno da kružna frekvencija jediničnog pojačanja bude $\omega_C = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i margina faze bude 45° . Jedan od sistema ima funkciju prenosa u otvorenoj sprezi koja po formi odgovara teorijski analiziranoj,

$$T_1(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

za $\omega_0 = 1000\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $\omega_2 = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, pa je

$$T_1(s) = \frac{1000\sqrt{2}}{s \left(1 + \frac{s}{1000}\right)} \approx \frac{1414.2}{s \left(1 + \frac{s}{1000}\right)}$$

Za ovakav sistem se po zatvaranju sprege očekuje $\omega_P = \sqrt{\omega_0 \omega_2} = 1000\sqrt[4]{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 1189.21 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $Q_P = \sqrt{\omega_0/\omega_2} = \sqrt[4]{2} \approx 1.1892$.

Drugi sistem koji će biti razmatran, u otvorenoj sprezi ima dvostruki pol na $s = -\omega_1$ (ovo je realna osa!), pa je funkcija prenosa opšteg oblika

$$T_2(s) = \frac{T_{20}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)^2}$$

Pojačanje i frekvencija dvostrukog pola (ω_1) su podešeni tako da kružna frekvencija jediničnog pojačanja bude $\omega_C = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i margina faze bude $\varphi_m = 45^\circ$, što se postiže za $T_{20} = 1 + \left(\tan \frac{3\pi}{8}\right)^2$ i $\omega_1 = 1000 / \tan \frac{3\pi}{8} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Dakle, funkcija prenosa u otvorenoj sprezi drugog sistema je

$$T_2(s) = \frac{1 + \left(\tan \frac{3\pi}{8}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{1000} \tan \frac{3\pi}{8}\right)^2} \approx \frac{6.8284}{\left(1 + \frac{s}{414.21}\right)^2}$$

Da ponovimo, kod oba ba sistema je izborom parametara podešeno da kružna frekvencija jediničnog pojačanja (*crossover frequency*) bude $\omega_C = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, pri kojoj je margina faze $\varphi_m =$

45°. Cilj primera je da ilustruje kako dva sistema koji imaju istu marginu faze i istu frekvenciju jediničnog pojačanja, a različite funkcije prenosa, imaju različite vrednosti za Q -faktor i kružnu frekvenciju polova u zatvorenoj sprezi, Q_P i ω_P . Međutim, iako se sistemima Q -faktor i kružna frekvencija polova u zatvorenoj sprezi neće poklapati, imajuće relativno bliske vrednosti. U slučaju kada bi sistemi imali marginu faze jednaku nuli ($\varphi_m = 0$) i istu kružnu frekvenciju jediničnog pojačanja ω_C , tada bi oba sistema imala par polova baš na $\pm j\omega_C$, odnosno $\omega_P = \omega_C$ i $Q_P \rightarrow \infty$, što izražava Barkhauzenov kriterijum. Udaljavanje od kritične (Barkhauzenove) tačke za jednake vrednosti margine faze (to je samo jedna od mogućih mera udaljenosti od Barkhauzenove tačke) kod različitih sistema proizvodi različite (ali slične) efekte.

Oba sistema će biti analizirana primenom numeričkih metoda, crtanjem:

1. frekvencijskih karakteristika sistema u otvorenoj sprezi,
2. Nikvistovog dijagrama (ovde se podrazumeva da je sistem u otvorenoj sprezi),
3. rasporeda polova i nula u sistema zatvorenoj sprezi,
4. Hevisajdovog odziva sistema u zatvorenoj sprezi i
5. frekvencijskih karakteristika sistema u zatvorenoj sprezi.

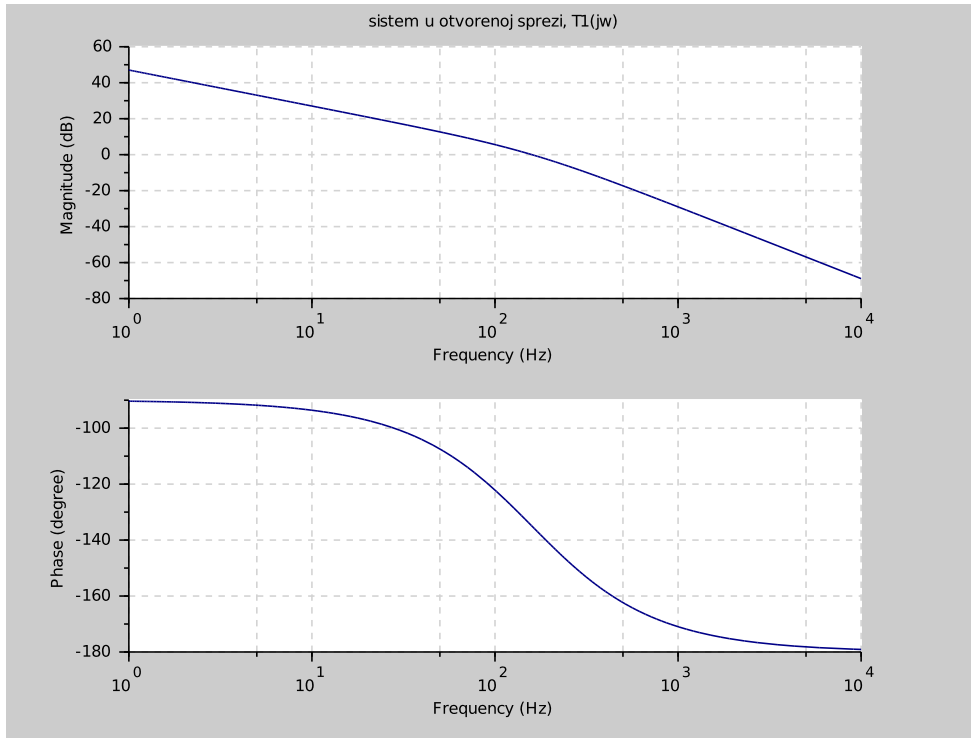
Dijagrami su dobijeni korišćenjem programa Scilab.

6 Analiza sistema 1

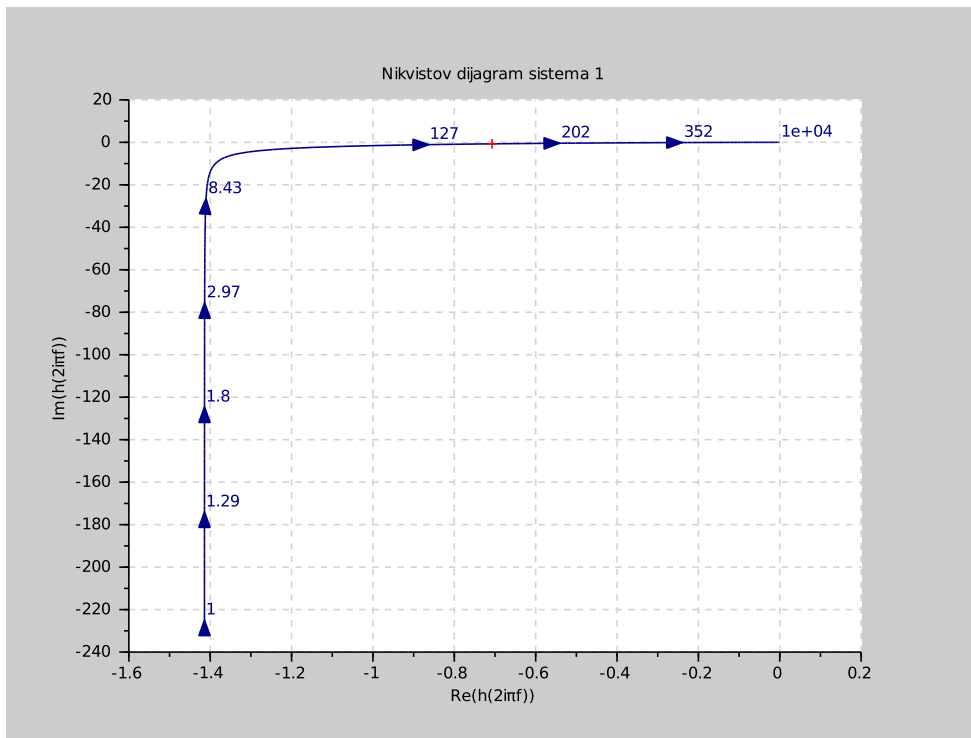
Na slikama 1, 2, 3, 4 i 5 su za sistem 1 prikazani frekvencijske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi, Nikvistov dijagram, raspored polova i nula sistema u zatvorenoj sprezi, Hevisajdov odziv sistema u zatvorenoj sprezi i frekvencijske karakteristika sistema u zatvorenoj sprezi. Uočava se da sistem u otvorenoj sprezi ima marginu faze $\varphi_m = 45^\circ$, da je frekvencija jediničnog pojačanja $f_C = \frac{1000}{2\pi}$ Hz ≈ 159.15 Hz, odnosno $\omega_C = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Crveni + na Nikvistovom dijagramu odgovara frekvenciji jediničnog pojačanja. Polovi sistema se nalaze na teorijski predviđenim lokacijama, na $\omega_P = \frac{1000}{\sqrt{2}} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i

7 Analiza sistema 2

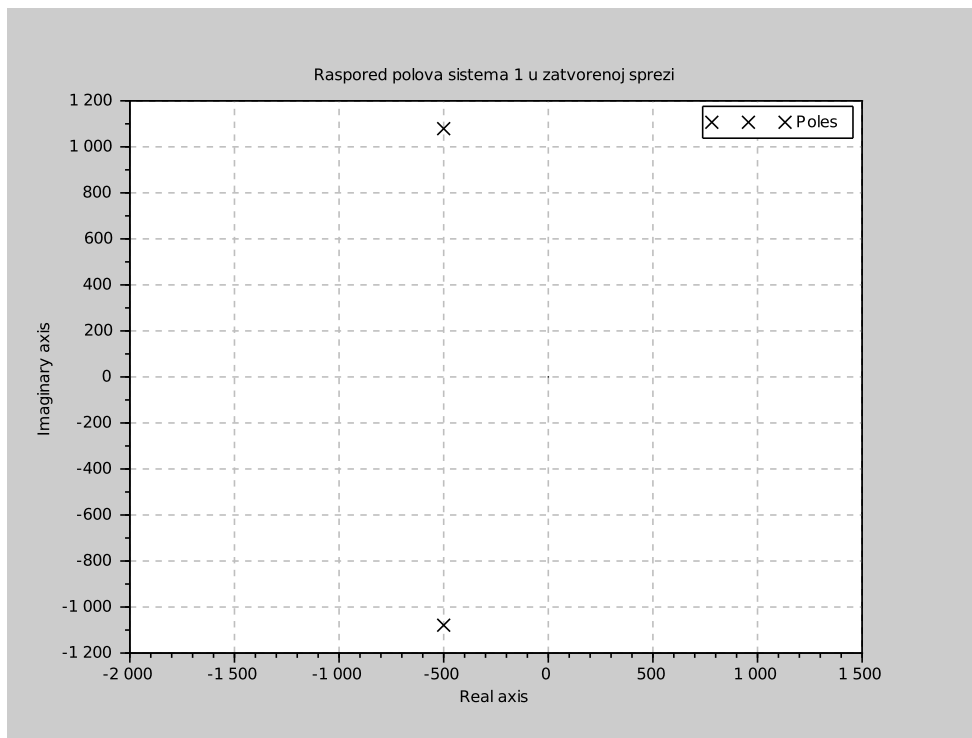
Na slikama 6, 7, 8, 9 i 10 su za sistem 2 prikazani frekvencijske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi, Nikvistov dijagram, raspored polova i nula sistema u zatvorenoj sprezi, Hevisajdov odziv sistema u zatvorenoj sprezi i frekvencijske karakteristika sistema u zatvorenoj sprezi.



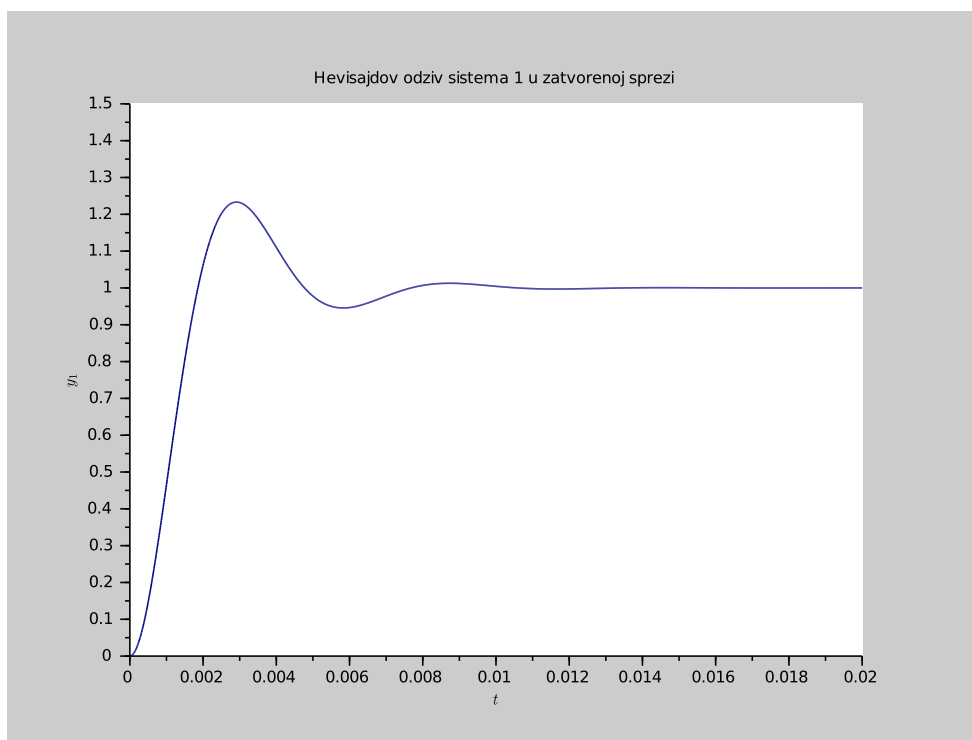
Slika 1: Frekvencijske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi, $T_1(j\omega)$.



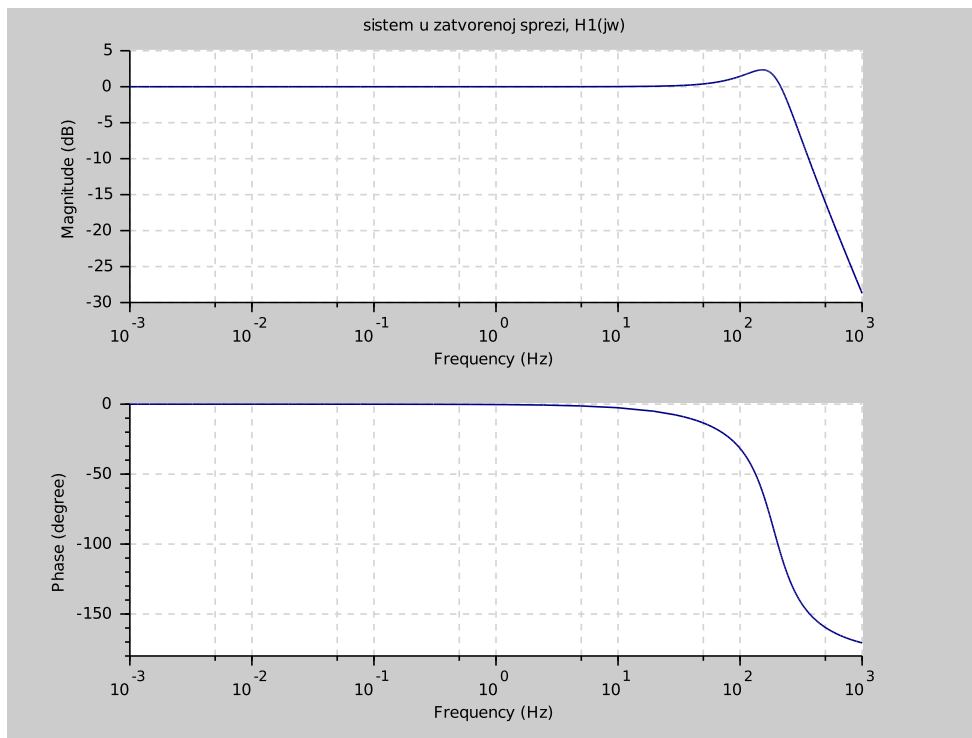
Slika 2: Nikvistov dijagram sistema u otvorenoj sprezi, $T_1(s)$.



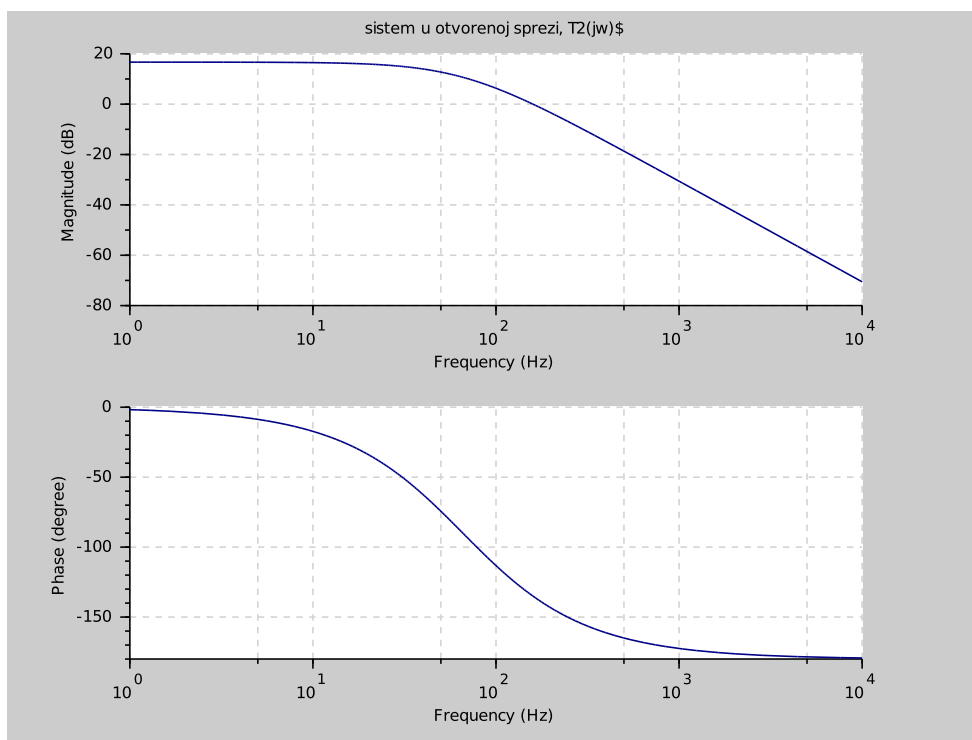
Slika 3: Raspored nula i polova sistema u zatvorenoj sprezi, $H_1(s)$.



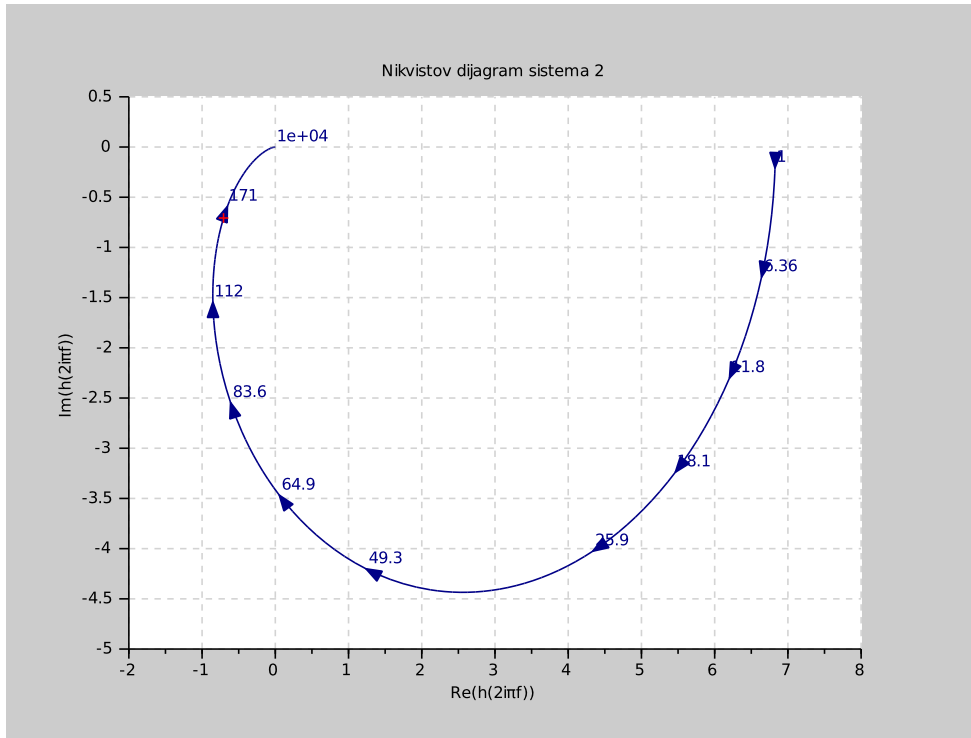
Slika 4: Hevisajdov odziv sistema u zatvorenoj sprezi, $h_1(t)$.



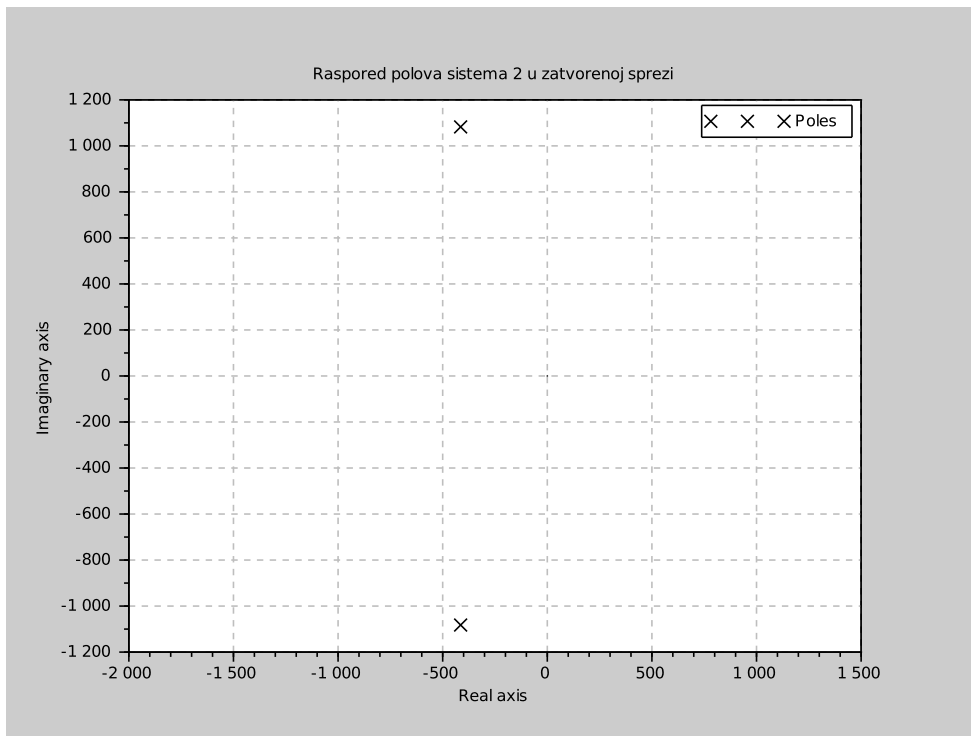
Slika 5: Frekvencijske karakteristike sistema u zatvorenoj sprezi, $H_1(j\omega)$.



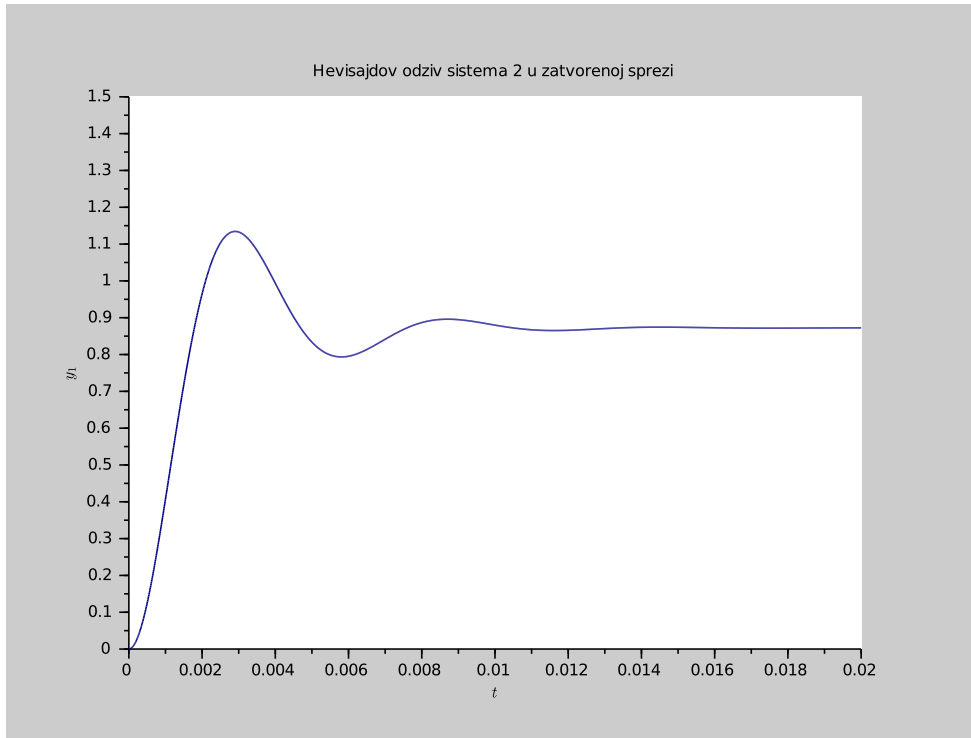
Slika 6: Frekvencijske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi, $T_2(j\omega)$.



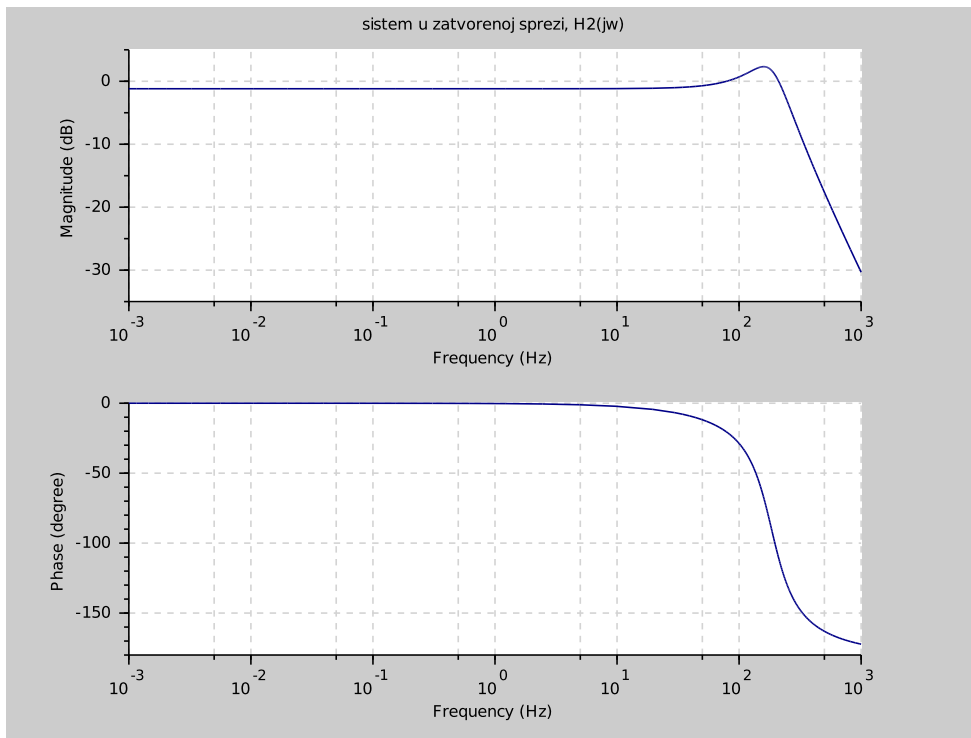
Slika 7: Nikvistov dijagram sistema u otvorenoj sprezi, $T_2(s)$.



Slika 8: Raspored nula i polova sistema u zatvorenoj sprezi, $H_2(s)$.

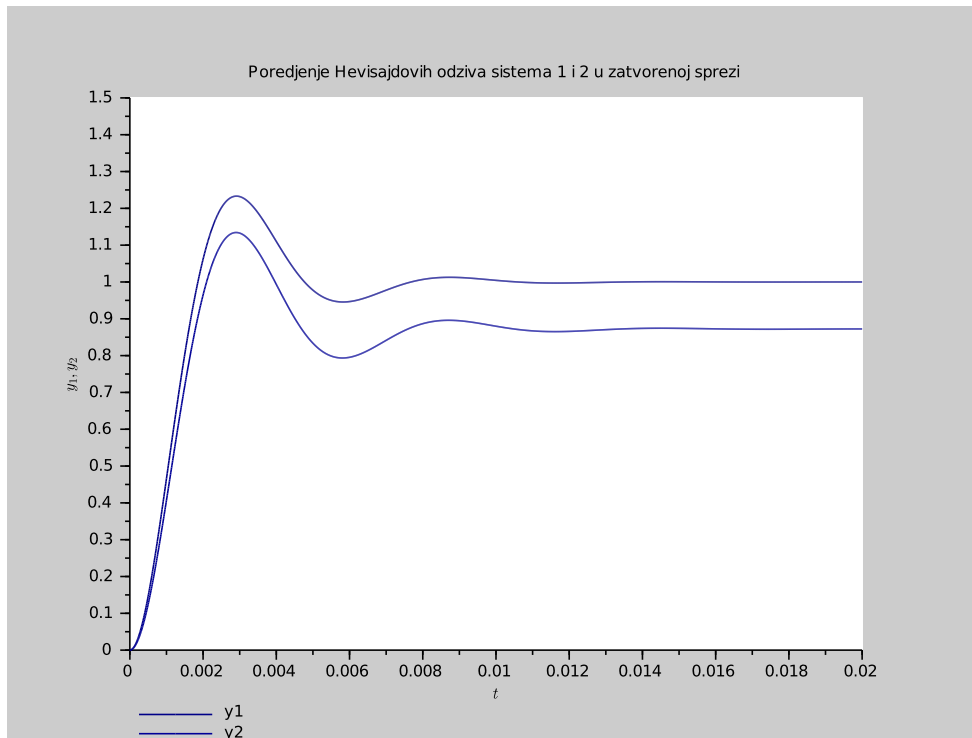


Slika 9: Hevisajdov odziv sistema u zatvorenoj sprezi, $h_2(t)$.

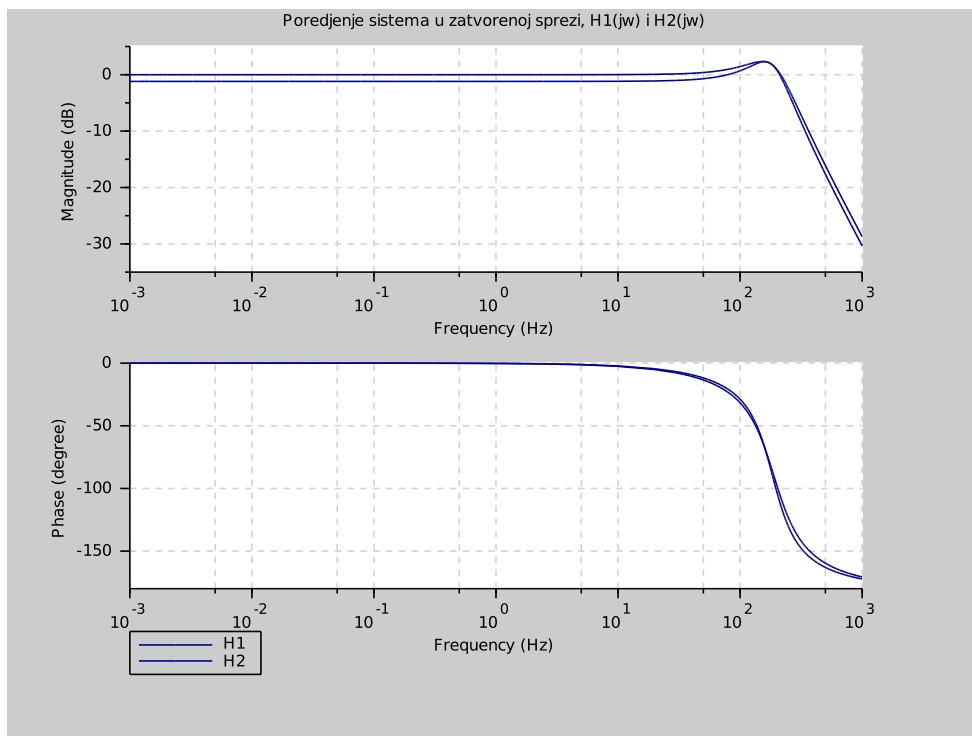


Slika 10: Frekvencijske karakteristike sistema u zatvorenoj sprezi, $H_2(j\omega)$.

8 Poređenje i zaključci



Slika 11: Poređenje Hevisajdovih odziva sistema.



Slika 12: Poređenje frekvencijskih karakteristika sistema u zatvorenoj sprezi.

Literatura

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Barkhausen_stability_criterion
- [2] <http://www.scilab.org/>
- [3] <http://web.mit.edu/klund/www/weblatex/node4.html>
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_field

9 Dodatak

```
// validity of the conclusions about the phase margin and the Q factor
```

```
//initialize
clear();

xdel(winsid());

mode(1);

s = %s;
c = -1/sqrt(2);

// the first system

w0 = 1000 * sqrt(2);
w2 = 1000;
T1 = syslin('c', w0 / (s * (1 + s / w2)));

colordef('new', 'white'); //figure(0);
bode(T1, 1, 1e4);
title('sistem u otvorenoj sprezi, T1(jw)');
xs2pdf(0, 'validity-T1-bode');
xs2png(0, 'validity-T1-bode');

colordef('new', 'white'); //figure(1);
nyquist(T1, 1, 1e4, %f);
plot(c, c, 'r+');
title('Nikvistov dijagram sistema 1');
xs2pdf(1, 'validity-T1-nyquist');
xs2png(1, 'validity-T1-nyquist');

H1 = T1 / (1 + T1);

colordef('new', 'white'); //figure(2);
plzr(H1);
title('Raspored polova sistema 1 u zatvorenoj sprezi');
xs2pdf(2, 'validity-H1-plzr');
xs2png(2, 'validity-H1-plzr');

t = 0 : 1e-5 : 0.2e-1;
y1 = csim('step', t, H1);

colordef('new', 'white'); //figure(3);
plot2d(t, y1, rect=[0, 0, 0.2e-1, 1.5]);
xlabel('$t$');
ylabel('$y_1$');
title('Hevisajdov odziv sistema 1 u zatvorenoj sprezi');
xs2pdf(3, 'validity-H1-step');
xs2png(3, 'validity-H1-step');

colordef('new', 'white'); //figure(4);
bode(H1);
title('sistem u zatvorenoj sprezi, H1(jw)');
xs2pdf(4, 'validity-H1-bode');
xs2png(4, 'validity-H1-bode');

// the second system

tg = tan(3 * %pi / 8);
w1 = 1000 / tg;
T20 = 1 + tg^2;
T2 = syslin('c', T20 / (1 + s/w1)^2);

colordef('new', 'white'); //figure(5);
bode(T2, 1, 1e4);
title('sistem u otvorenoj sprezi, T2(jw)$');
xs2pdf(5, 'validity-T2-bode');
xs2png(5, 'validity-T2-bode');
```

```

colordef('new', 'white'); //figure(6);
nyquist(T2, 1, 1e4, %f);
plot(c, c, 'r+');
title('Nikvistov dijagram sistema 2');
xs2pdf(6, 'validity-T2-nyquist');
xs2png(6, 'validity-T2-nyquist');

H2 = T2 / (1 + T2);

colordef('new', 'white'); //figure(7);
plzr(H2);
title('Raspored polova sistema 2 u zatvorenoj sprezi');
xs2pdf(7, 'validity-H2-plzr');
xs2png(7, 'validity-H2-plzr');

//t = 0 : 1e-5 : 0.2e-1;
y2 = csim('step', t, H2);

colordef('new', 'white'); //figure(8);
plot2d(t, y2, rect=[0, 0, 0.2e-1, 1.5]);
xlabel('$t$');
ylabel('$y_1$');
title('Hevisajdov odziv sistema 2 u zatvorenoj sprezi');
xs2pdf(8, 'validity-H2-step');
xs2png(8, 'validity-H2-step');

colordef('new', 'white'); //figure(9);
bode(H2);
title('sistem u zatvorenoj sprezi, H2(jw)');
xs2pdf(9, 'validity-H2-bode');
xs2png(9, 'validity-H2-bode');

// comparison

colordef('new', 'white'); //figure(10);
plot2d(t', [y1', y2'], rect=[0, 0, 0.2e-1, 1.5], leg='y1@y2');
xlabel('$t$');
ylabel('$y_1, y_2$');
title('Poredjenje Hevisajdovih odziva sistema 1 i 2 u zatvorenoj sprezi');
xs2pdf(10, 'validity-comparison-step');
xs2png(10, 'validity-comparison-step');

colordef('new', 'white'); //figure(11);
bode([H1; H2], ['H1', 'H2']);
title('Poredjenje sistema u zatvorenoj sprezi, H1(jw) i H2(jw)');
xs2pdf(11, 'validity-comparison-bode');
xs2png(11, 'validity-comparison-bode');

p1 = roots(denom(H1))
r1 = abs(real(p1(1)));
wp1 = abs(p1(1))
Qp1 = 1/(2*r1/wp1)

p2 = roots(denom(H2))
r2 = abs(real(p2(1)));
wp2 = abs(p2(1))
Qp2 = 1/(2*r2/wp2)

```