

# Usrednjavanje i linearizacija u prostoru stanja

Predrag Pejović

3. april 2016

## 1 Uvod

Kako bi prekidački konvertori obezbeđivali zadati izlazni napon bez obzira na prisustvo poremećaja poput varijacija mrežnog napona i varijacija izlazne struje, potrebno je projektovati regulator izlaznog napona. Za projektovanje regulatora izlaznog napona i analizu stabilnosti rezultujućeg sistema neophodno je imati dinamički model konvertora. Egzaktan dinamički model prekidačkih konvertora je složen, zbog nestacionarnosti i prisustva nelinearnih elemenata u sistemu. Stoga je potrebno razviti aproksimativan model, za koji bi poželjno bilo da ga je moguće svesti na model linearnog stacionarnog sistema u okolini mirne radne tačke. Takav postupak je predložen u doktorskoj disertaciji Slobodana M. Čuka, “Modelling, Analysis, and Design of Switching Converters” i zasnovan je na usrednjavanju i linearizaciji modela stanja. Predloženi postupak se od tada koristi kao glavna tehnika za formiranje dinamičkih modela prekidačkih konvertora i projektovanje njihovih regulatora.

## 2 Model stanja

U razmatranjima koja slede, za opisivanje električnih kola će biti korišćen model stanja sistema. Model stanja je skup jednačina koje karakterišu sistem i koje se sastoje iz skupa diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnoj formi, po promenljivima koje zovemo promenljive stanja, što predstavlja jednačine stanja, i sistema algebarskih jednačina koje izražavaju izlazne promenljive sistema u funkciji promenljivih stanja i ulaznih promenljivih, što čini jednačine izlaza. Ukoliko je razmatrani sistem linearno i stacionarno električno kolo koje nema dinamičku (algebarsku) degeneraciju, jednačine stanja u matricnoj formi su

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

što je nehomogen linearan sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima izražen u normalnoj formi po promenljivim stanja i predstavlja sistem jednačina stanja. Njih prati sistem algebarskih jednačina

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

koje čine sistem jednačina izlaza. Sistem jednačina stanja i sistem jednačina izlaza čine model stanja. Na ovaj način su razdvojene diferencijalne jednačine od algebarskih, što daje niz pogodnosti u analizi sistema. Osim toga, početni uslovi diferencijalnih jednačina se zadaju na jednostavan način, kao vektor promenljivih stanja u početnom trenutku, bez potrebe za određivanjem izvoda promenljive stanja u početnom trenutku kao u slučaju svodenja sistema na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda.

### 3 Modeli stanja prekidačkih konvertora

Na početku, posmatraćemo konvertor u kontinualnom režimu rada kod koga se smenjuju dva stanja prekidačkih elemenata (dve prekidačke kombinacije), kombinacija kada vodi prekidač i ne vodi dioda, indeksirana sa 1, i kombinacija kada vodi dioda, a ne vodi prekidač, indeksirana sa 2. Smatraćemo da se prekidač uključuje u trenucima

$$t_k = k T_S \quad (3)$$

gde je  $T_S$  perioda prekidanja. Takođe, prekidač se isključuje u trenucima

$$t_k + d_k T_S = (k + d_k) T_S \quad (4)$$

gde je  $d_k$  diskretna funkcija vremena, definisana jedinstvenom vrednošću za interval

$$k T_S \leq t < (k + 1) T_S. \quad (5)$$

Pretpostavićemo da je konvertor koji analiziramo u svakoj od prekidačkih kombinacija moguće modelovati ekvivalentnim linearnim kolom za datu kombinaciju stanja prekidačkih elemenata za koje je moguće formirati model stanja poput (1) i (2). Stoga, u intervalu vremena

$$k T_S \leq t < (k + d_k) T_S \quad (6)$$

trajanja  $d_k T_S$ , kada je aktivna prekidačka kombinacija indeksirana sa 1, u kojoj je prekidač provodan i dioda neprovodna, konvertor je predstavljen linearnim modelom stanja

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \quad (7)$$

i

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t). \quad (8)$$

Tokom intervala

$$(k + d_k) T_S \leq t < (k + 1) T_S \quad (9)$$

trajanja  $d'_k T_S = (1 - d_k) T_S$ , kada je aktivna prekidačka kombinacija indeksirana sa 2, u kojoj je prekidač neprovodan, a dioda provodna, konvertor je predstavljen linearnim modelom stanja

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (10)$$

i

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t). \quad (11)$$

Smenjivanje modela stanja čini sistem nestacionarnim i predstavlja teškoću u analizi sistema. U cilju projektovanja regulatora izlaznog napona konvertora, povoljno je imati linearan stacionaran model konvertora u okolini odgovarajuće mirne radne tačke, kako bi se omogućila primena algoritama sinteze i podešavanja regulatora razvijena u teoriji linearnih sistema automatskog upravljanja. Dalje izvođenje će težiti ka tom cilju.

### 4 Usrednjavanje

Upravljačka akcija kod prekidačkih konvertora se svodi na promenu faktora ispunjenosti pobudnih impulsa prekidača koje opisuje diskretna funkcija vremena  $d_k$ . Kako je uticaj na

promene u konvertoru kvantovan u vremenu periodom prekidanja, ima smisla posmatrati periodu prekidanja kao jedinstvenu celinu, na kojoj upravljačka promenljiva  $d_k$  ima jedinstvenu vrednost. Nasuprot ovoj diskretnoj promenljivoj, promenljive stanja (sadržane u vektoru  $\mathbf{x}(t)$ ), ulazne promenljive (sadržane u vektoru  $\mathbf{u}(t)$ ), kao i promenljive izlaza (sadržane u vektoru  $\mathbf{y}(t)$ ) su kontinualne funkcije vremena koje se kao diskretne funkcije vremena mogu reprezentovati srednjim vrednostima tokom periode prekidanja,

$$\langle z_k \rangle \triangleq \frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} z(t) dt \quad (12)$$

gde je  $z(t)$  promenljiva stanja, ulaza ili izlaza. Tako je postupkom usrednjavanja  $\langle \mathbf{x}_k \rangle$  definisano kao

$$\langle \mathbf{x}_k \rangle \triangleq \frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} \mathbf{x}(t) dt \quad (13)$$

$\langle \mathbf{u}_k \rangle$  je definisano kao

$$\langle \mathbf{u}_k \rangle \triangleq \frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} \mathbf{u}(t) dt \quad (14)$$

i  $\langle \mathbf{y}_k \rangle$  je definisano kao

$$\langle \mathbf{y}_k \rangle \triangleq \frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} \mathbf{y}(t) dt. \quad (15)$$

Uvođenjem označavanja

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_S) \quad (16)$$

usrednjavanjem izvoda vektora promenljivih stanja dobija se

$$\frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} \frac{\mathbf{x}(t)}{dt} dt = \frac{\mathbf{x}((k+1)T_S) - \mathbf{x}(kT_S)}{T_S} = \frac{\Delta \mathbf{x}_k}{T_S} \quad (17)$$

gde je

$$\Delta \mathbf{x}_k \triangleq \mathbf{x}((k+1)T_S) - \mathbf{x}(kT_S). \quad (18)$$

Izvod vektora promenljivih stanja je određen jednom od dve mogućnosti, zavisno od stanja prekidača koje je kontrolisano vremenom, pa je (17) prema (7) i (10) dato sa

$$\frac{\Delta \mathbf{x}_k}{T_S} = \frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+d_k)T_S} (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t)) dt + \frac{1}{T_S} \int_{(k+d_k)T_S}^{(k+1)T_S} (\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t)) dt. \quad (19)$$

Analogno izvođenju (19), za usrednjen vektor izlaznih promenljivih se dobija

$$\langle \mathbf{y}_k \rangle = \frac{1}{T_S} \int_{kT_S}^{(k+d_k)T_S} (\mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t)) dt + \frac{1}{T_S} \int_{(k+d_k)T_S}^{(k+1)T_S} (\mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t)) dt. \quad (20)$$

Jednačine (19) i (20) predstavljaju diskretan usrednjen model stanja konvertora koji zbog prisustva integrala po kontinualnim promenljivim još nije pogodan za primenu jer je suviše složen. Stoga je povoljno izvesti aproksimativan diskretan usrednjen model stanja konvertora uvodeći pretpostavke po kojima je na intervalu  $kT_S \leq t < (k+1)T_S$

$$\mathbf{x}(t) \approx \langle \mathbf{x}_k \rangle \quad (21)$$

i

$$\mathbf{u}(t) \approx \langle \mathbf{u}_k \rangle \quad (22)$$

što po pristupu odgovara *forward Euler* pravilu za numeričku integraciju diferencijalnih jednačina. Uvedenom aproksimacijom se integrali iz (19) i (20) svode na

$$\frac{\Delta \mathbf{x}_k}{T_S} = d_k (\mathbf{A}_1 \langle \mathbf{x}_k \rangle + \mathbf{B}_1 \langle \mathbf{u}_k \rangle) + d'_k (\mathbf{A}_2 \langle \mathbf{x}_k \rangle + \mathbf{B}_2 \langle \mathbf{u}_k \rangle) \quad (23)$$

i

$$\langle \mathbf{y}_k \rangle = d_k (\mathbf{C}_1 \langle \mathbf{x}_k \rangle + \mathbf{D}_1 \langle \mathbf{u}_k \rangle) + d'_k (\mathbf{C}_2 \langle \mathbf{x}_k \rangle + \mathbf{D}_2 \langle \mathbf{u}_k \rangle) \quad (24)$$

što se preuređenjem izraza grupisanjem uz  $\langle \mathbf{x}_k \rangle$  i  $\langle \mathbf{u}_k \rangle$  svodi na

$$\frac{\Delta \mathbf{x}_k}{T_S} = (d_k \mathbf{A}_1 + d'_k \mathbf{A}_2) \langle \mathbf{x}_k \rangle + (d_k \mathbf{B}_1 + d'_k \mathbf{B}_2) \langle \mathbf{u}_k \rangle \quad (25)$$

i

$$\langle \mathbf{y}_k \rangle = (d_k \mathbf{C}_1 + d'_k \mathbf{C}_2) \langle \mathbf{x}_k \rangle + (d_k \mathbf{D}_1 + d'_k \mathbf{D}_2) \langle \mathbf{u}_k \rangle. \quad (26)$$

Jednačine (25) i (26) modeluju konvertor nelinearnim diferencnim jednačinama i relativno su pogodne za upotrebu u simulaciji. Nažalost, one su aproksimativne, zasnovane na *forward Euler* integracionom pravilu i sa sobom nose problem stabilnosti i lokalne greške odsecanja (*local truncation error*). Oba navedena problema nestaju ako vremenski korak integracije, koji je u našem slučaju jednak periodi prekidača, teži nuli. Granični proces u kome  $T_S \rightarrow 0$  se odvija tako što istovremeno  $k \rightarrow \infty$  prema uslovu

$$k = \frac{t}{T_S} \quad (27)$$

gde je  $t$  tekuća vremenska promenljiva, ekvivalent promenljivoj  $t_k$  koja je u diskretizovanom modelu predstavljala vreme. Granični proces dovodi do

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} t_k = \lim_{T_S \rightarrow 0} k T_S = t \quad (28)$$

tako što se broj prekidačkih intervala ( $k$ ) od koordinatnog početka do posmatranog trenutka vremena neograničeno povećava. Diskretna promenljiva  $d_k$  se prema opisanom graničnom procesu usled neograničenog zgušnjavanja trenutaka odabiranja pretvara u funkciju kontinualnog vremena

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} d_k = d(t) \quad (29)$$

i analogno tome

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} d'_k = d'(t). \quad (30)$$

Na intervalu prekidanja usrednjeni vektori stanja, ulaznih promenljivih i izlaznih promenljivih se ovim graničnim procesom takođe pretvaraju u kontinualne funkcije vremena

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \langle \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (31)$$

Uz pretpostavku neprekidnosti funkcija u  $\mathbf{x}(t)$  na posmatranom intervalu vremena, koja je uvedenim pretpostavkama ispunjena uz dodatnu razumnu pretpostavku da nema Dirakovih impulsa u vektoru pobuda  $\mathbf{u}(t)$ , granične vrednosti promenljivih stanja su jednake samim promenljivim stanja

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \langle \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}(t). \quad (32)$$

Ovim je graničnim procesom uklonjena talasnost (*ripple*) promenljivih stanja, o čemu će biti više reči kada se bude govorilo o fizičkoj interpretaciji razmatranog procesa usrednjavanja.

Granični proces primenjen na vektor ulaznih promenljivih dovodi do

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \mathbf{u}_k = \langle \mathbf{u}(t) \rangle \quad (33)$$

a kako je i ovde moguće i razumno nametnuti pretpostavku neprekidnosti ili makar neprekidnosti na intervalu vremena dužem od periode prekidanja, dobija se

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \mathbf{u}_k = \langle \mathbf{u}(t) \rangle = \mathbf{u}(t) \quad (34)$$

Za razliku od vektora promenljivih stanja i vektora ulaznih promenljivih, vektor izlaznih promenljivih može sadržati promenljive koje su prekidne na svakom intervalu prekidanja trajanja  $T_S$ , pa se granični proces u ovom slučaju zaustavlja na

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \mathbf{y}_k = \langle \mathbf{y}(t) \rangle \quad (35)$$

gde se u opštem slučaju (za bilo koju promenljivu izlaza) ne može tvrditi da se graničnim procesom srednja vrednost promenljive svodi na njenu trenutnu vrednost. To važi samo za promenljive izlaza koje su kontinualne, odnosno nemaju prekid u svakoj periodi prekidanja.

U skladu sa definicijom izvoda funkcije,

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}_k}{T_S} = \frac{d \mathbf{x}(t)}{dt}. \quad (36)$$

Kako pod uvedenim pretpostavkama u graničnom procesu dobijamo

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}(t) \quad (37)$$

što je uvedeno u (32), dobija se i

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}_k}{T_S} = \frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d \langle \mathbf{x}(t) \rangle}{dt}. \quad (38)$$

Zamenom rezultata graničnog procesa u (25) i (26), dobijaju se kontinualne jednačine usrednjenog modela stanja konvertora

$$\frac{d \langle \mathbf{x}(t) \rangle}{dt} = (d(t) \mathbf{A}_1 + d'(t) \mathbf{A}_2) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + (d(t) \mathbf{B}_1 + d'(t) \mathbf{B}_2) \langle \mathbf{u}(t) \rangle \quad (39)$$

i

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle = (d(t) \mathbf{C}_1 + d'(t) \mathbf{C}_2) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + (d(t) \mathbf{D}_1 + d'(t) \mathbf{D}_2) \langle \mathbf{u}(t) \rangle. \quad (40)$$

Dobijeni sistem jednačina (39) i (40) još uvek nije linearan sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, kakav je pogodan za analizu i sintezu zakona upravljanja. Kao problem se pojavljuju funkcije vremena  $d(t)$  i  $d'(t)$ , koje u sistemu sa zatvorenom povratnom spregom postaju funkcije promenljivih stanja i promenljivih izlaza, pa sistem jednačina tada od nestacionarnog postaje nelinearan. Stoga je potrebno izvršiti i linearizaciju sistema u okolini odgovarajuće radne tačke, o čemu će biti mnogo više reči (i jednačina) kasnije.

U cilju pojednostavljenja notacije, povoljno je uvesti pojmove usrednjenih matrica

$$\mathbf{A}(\delta) \triangleq \delta \mathbf{A}_1 + (1 - \delta) \mathbf{A}_2 \quad (41)$$

$$\mathbf{B}(\delta) \triangleq \delta \mathbf{B}_1 + (1 - \delta) \mathbf{B}_2 \quad (42)$$

$$\mathbf{C}(\delta) \triangleq \delta \mathbf{C}_1 + (1 - \delta) \mathbf{C}_2 \quad (43)$$

i

$$\mathbf{D}(\delta) \triangleq \delta \mathbf{D}_1 + (1 - \delta) \mathbf{D}_2. \quad (44)$$

Uvođenjem usrednjenih matrica sistem jednačina (39) i (40) postaje

$$\frac{d \langle \mathbf{x}(t) \rangle}{dt} = \mathbf{A}(d(t)) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \mathbf{B}(d(t)) \langle \mathbf{u}(t) \rangle \quad (45)$$

i

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle = \mathbf{C}(d(t)) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \mathbf{D}(d(t)) \langle \mathbf{u}(t) \rangle. \quad (46)$$

Jednačine (45) i (46) predstavljaju nelinearni dinamički model prekidačkog konvertora u kontinualnom vremenu i to je po strukturi sistem koji se sastoji iz sistema običnih linearnih nehomogenih i nestacionarnih diferencijalnih jednačina u normalnoj formi (45) po promenljivim stanja i sistema algenarskih jednačina izlaza (46).

Uvedeno usrednjavanje matrica (41) do (44) aproksimativni diskretni model konvertora (25) i (26) svodi na kompaktnu formu

$$\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T_S} = \mathbf{A}(d_k) \langle \mathbf{x}_k \rangle + \mathbf{B}(d_k) \langle \mathbf{u}_k \rangle \quad (47)$$

i

$$\langle \mathbf{y}_k \rangle = \mathbf{C}(d_k) \langle \mathbf{x}_k \rangle + \mathbf{D}(d_k) \langle \mathbf{u}_k \rangle \quad (48)$$

koja predstavlja (45) i (46) diskretizovane po *forward Euler* integracionom pravilu i nosi sa sobom sve njegove nedostatke.

## 5 Fizička interpretacija usrednjenih modela konvertora

Prethodno izvođenje je metodološki dosta složeno. Uzrok tome je struktura sistema koji ima osobine kontinualnog sistema u delu koji se tiče odziva kola tokom intervala vremena kada se kombinacija stanja prekidača ne menja, za  $kT_S \leq t < (k + d_k)T_S$  i  $(k + d_k)T_S \leq t < (k + 1)T_S$ . Sa druge strane, promena stanja prekidača je diskretna proces, kvantovan u vremenu periodom prekidanja  $T_S$ , karakterisan diskretnom funkcijom vremena  $d_k$ , koja se može odrediti tek posle trenutka  $(k + 1)T_S$  kada je poznato stanje prekidača tokom celog  $k$ -tog perioda prekidanja. Ovakav sistem je moguće analitički opisati i rešiti, u nekim slučajevima čak i u zatvorenoj formi, u opštem slučaju numerički. Međutim, takvo rešenje je od male praktične vrednosti prilikom sinteze regulatora, zbog svoje složenosti. Stoga je prvo izveden aproksimativni diskretni model (25) i (26). Ovaj model je izveden primenom aproksimacija sličnih kao u slučaju izvođenja *forward Euler* diskretizacionog pravila i prate ga isti nedostaci, pre svega sklonost ka nestabilnosti pri usvojenom vremenskom koraku  $T_S$ . Stoga je graničnim procesom  $T_S \rightarrow 0$  sistem (25) i (26) ponovo vraćen u kontinualni domen, čime je smanjen uticaj usvojenih aproksimacija.

Granični proces  $T_S \rightarrow 0$  ima i svoju fizičku interpretaciju, a to je povećavanje frekvencije prekidanja. Povećavanjem frekvencije prekidanja smanjuje se talasnost (*ripple*) promenljivih stanja i u graničnom procesu teži nuli. Realni konvertori upravo tako reaguju na povećavanje prekidačke frekvencije. Smanjenje talasnosti promenljivih stanja odgovara aproksimaciji male talasnosti (*small ripple approximation*) koja se često koristi u analizi ustaljenog stanja kod prekidačkih konvertora.

Da zaključimo, granični proces  $T_S \rightarrow 0$  se može fizički interpretirati kao uklanjanje talasnosti promenljivih stanja povećavanjem frekvencije prekidanja u konvertoru. Dobijeni model predstavlja proširenje modela zasnovanog na aproksimaciji male talasnosti (*small ripple approximation*), korišćenog u analizi ustaljenog odziva konvertora, na analizu prelaznih procesa u

konvertorima. Model je kontinualan u vremenu, karakterisan sistemom običnih linearnih nestacionarnih i nehomogenih diferencijalnih jednačina u normalnoj formi po promenljivim stanja i sistemom algebarskih jednačina po izlaznim promenljivim.

## 6 Mirna radna tačka i perturbacija

Kako bi analiza prelaznih procesa u konvertoru bila dalje pojednostavljena, vrši se linearizacija jednačina nelinearnog dinamičkog modela u mirnoj radnoj tački. Trenutne vrednosti usrednjenih promenljivih se predstavljaju kao zbir vrednosti koju one imaju u mirnoj radnoj tački, u okolini koje se linearizacija vrši, i odstupanja od te vrednosti, tzv. perturbacije. Na ovaj način se vektor usrednjenih promenljivih stanja predstavlja kao

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (49)$$

gde je  $\mathbf{X}_0$  vektor usrednjenih promenljivih stanja u mirnoj radnoj tački, a  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  varijacija usrednjenog vektora promenljivih stanja u odnosu na mirnu radnu tačku. Vektor ulaznih promenljivih se predstavlja kao

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = \mathbf{U}_0 + \hat{\mathbf{u}}(t) \quad (50)$$

gde je  $\mathbf{U}_0$  usrednjeni vektor ulaza u mirnoj radnoj tački, a  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  njegova varijacija. Potpuno analogno, vektor usrednjenih izlaznih promenljivih je

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle = \mathbf{Y}_0 + \hat{\mathbf{y}}(t) \quad (51)$$

gde je  $\mathbf{Y}_0$  vektor usrednjenih izlaznih promenljivih u mirnoj radnoj tački, a  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  njegova varijacija. Na kraju, upravljačka promenljiva se prikazuje kao

$$d(t) = D_0 + \hat{d}(t) \quad (52)$$

gde je  $D_0$  *duty ratio* u mirnoj radnoj tački, a  $\hat{d}(t)$  njegova varijacija. Kako je

$$d'(t) = 1 - d(t) = 1 - D_0 - \hat{d}(t) = D'_0 - \hat{d}(t) \quad (53)$$

dobija se

$$\hat{d}'(t) = -\hat{d}(t). \quad (54)$$

## 7 Ustaljeno stanje

Za konvertor u mirnoj radnoj tački važi

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{X}_0 \quad (55)$$

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = \mathbf{U}_0 \quad (56)$$

$$\langle \mathbf{y}(t) \rangle = \mathbf{Y}_0 \quad (57)$$

i

$$d(t) = D_0. \quad (58)$$

Tada je prema (45) i (46)

$$\frac{d\mathbf{X}_0}{dt} = \mathbf{0} = \mathbf{A}(D_0)\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}(D_0)\mathbf{U}_0 \quad (59)$$

i

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{C}(D_0) \mathbf{X}_0 + \mathbf{D}(D_0) \mathbf{U}_0 \quad (60)$$

što predstavlja jednačine konvertora u mirnoj radnoj tački, u ustaljenom stanju.

Jednačine stanja u mirnoj radnoj tački se svode na linearne algebarske jednačine, pa se promenljive stanja konvertora i vektor izlaznih promenljivih dobijaju kao

$$\mathbf{X}_0 = -(\mathbf{A}(D_0))^{-1} \mathbf{B}(D_0) \mathbf{U}_0 \quad (61)$$

i

$$\mathbf{Y}_0 = (\mathbf{D}(D_0) - \mathbf{C}(D_0) (\mathbf{A}(D_0))^{-1} \mathbf{B}(D_0)) \mathbf{U}_0. \quad (62)$$

Opisani postupak pomoću jednostavnog formalnog postupka daje srednje vrednosti napona i struja konvertora u ustaljenom stanju. Stoga se može koristiti kada je potrebno odrediti zavisnost napona i struja konvertora od  $D_0$  kada komponente nisu idealne.

## 8 Linearizacija

Zamenom u jednačine stanja nelinearnog dinamičkog modela konvertora (45)

$$\frac{d \langle \mathbf{x}(t) \rangle}{dt} = \mathbf{A}(d(t)) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \mathbf{B}(d(t)) \langle \mathbf{u}(t) \rangle \quad (63)$$

trenutnih vrednosti promenljivih konvertora (naponi, struje i *duty ratio*) izrazima koji ih predstavljaju preko vrednosti u mirnoj radnoj tački i varijacije u odnosu na tu vrednost, dobija se

$$\frac{d (\mathbf{X}_0 + \widehat{\mathbf{x}}(t))}{dt} = \frac{d \widehat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}(D_0 + \widehat{d}(t)) (\mathbf{X}_0 + \widehat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{B}(D_0 + \widehat{d}(t)) (\mathbf{U}_0 + \widehat{\mathbf{u}}(t)). \quad (64)$$

Izraz za  $\mathbf{A}(D_0 + \widehat{d}(t))$  se može svesti na

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(D_0 + \widehat{d}(t)) &= (D_0 + \widehat{d}(t)) \mathbf{A}_1 + (D'_0 - \widehat{d}(t)) \mathbf{A}_2 \\ &= D_0 \mathbf{A}_1 + D'_0 \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \widehat{d}(t) \\ &= \mathbf{A}(D_0) + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \widehat{d}(t) \\ &= \mathbf{A} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \widehat{d}(t) \end{aligned} \quad (65)$$

gde je

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}(D_0). \quad (66)$$

Analogno, izraz za  $\mathbf{B}(D_0 + \widehat{d}(t))$  se svodi na

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(D_0 + \widehat{d}(t)) &= (D_0 + \widehat{d}(t)) \mathbf{B}_1 + (D'_0 - \widehat{d}(t)) \mathbf{B}_2 \\ &= D_0 \mathbf{B}_1 + D'_0 \mathbf{B}_2 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \widehat{d}(t) \\ &= \mathbf{B}(D_0) + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \widehat{d}(t) \\ &= \mathbf{B} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \widehat{d}(t) \end{aligned} \quad (67)$$

gde je

$$\mathbf{B} \triangleq \mathbf{B}(D_0). \quad (68)$$



Zamenom dobijenih izraza u nelinearni dinamički model konvertora dobija se

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \left( \mathbf{A} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \hat{d}(t) \right) (\mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}}(t)) + \left( \mathbf{B} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \hat{d}(t) \right) (\mathbf{U}_0 + \hat{\mathbf{u}}(t)) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{X}_0 + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \mathbf{X}_0 \hat{d}(t) + \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \hat{\mathbf{x}}(t) \hat{d}(t) \\ &\quad + \mathbf{B} \mathbf{U}_0 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{U}_0 \hat{d}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \hat{\mathbf{u}}(t) \hat{d}(t)\end{aligned}\quad (69)$$

odakle se mogu grupisati članovi

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{A} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B} \mathbf{U}_0 \\ &\quad + \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) + ((\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \mathbf{X}_0 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{U}_0) \hat{d}(t) \\ &\quad + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \hat{\mathbf{x}}(t) \hat{d}(t) + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \hat{\mathbf{u}}(t) \hat{d}(t).\end{aligned}\quad (70)$$

Prva grupa članova sadrži samo jednosmerne komponente za koje važi

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B} \mathbf{U}_0 = \mathbf{0} \quad (71)$$

pa se ova grupa anulira. Treća grupa članova sadrži međusobne proizvode perturbacija. Linearizacija nelinearnog dinamičkog modela konvertora se vrši zanemarivanjem ove grupe članova

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \hat{\mathbf{x}}(t) \hat{d}(t) + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \hat{\mathbf{u}}(t) \hat{d}(t) \approx \mathbf{0} \quad (72)$$

pa se linearizovane jednačine stanja svode na

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{E} \hat{d}(t) \quad (73)$$

gde je

$$\mathbf{E} \triangleq (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \mathbf{X}_0 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{U}_0. \quad (74)$$

Kako bi se dobijeni linearizovan sistem jednačina stanja sveo na standardnu formu koja se koristi u teoriji sistema automatskog upravljanja, potrebno je varijaciju upravljačke promenljive  $\hat{d}(t)$  uvrstiti u vektor ulaznih promenljivih. Ovo se svodi na proširenje vektora ulaznih promenljivih upravljačkom promenljivom i proširenje matrice  $\mathbf{B}$  kolonom  $\mathbf{E}$ , što se pomoću blok matrica efikasno zapisuje kao

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{B} | \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Postupak linearizacije sproveden za jednačine stanja se može sprovesti i za jednačine izlaza. Polazni sistem jednačina su jednačine izlaza iz nelinearnog dinamičkog modela (46)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(d(t)) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(d(t)) \mathbf{u}(t). \quad (76)$$

Zamenom  $d(t) = D_0 + \hat{d}(t)$  i razvojem usrednjenih matrica dobija se

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(D_0 + \hat{d}(t)) &= \left( D_0 + \hat{d}(t) \right) \mathbf{C}_1 + \left( D'_0 - \hat{d}(t) \right) \mathbf{C}_2 \\ &= D_0 \mathbf{C}_1 + D'_0 \mathbf{C}_2 + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \hat{d}(t) \\ &= \mathbf{C}(D_0) + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \hat{d}(t) \\ &= \mathbf{C} + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \hat{d}(t)\end{aligned}\quad (77)$$

gde je

$$\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}(D_0) \quad (78)$$

i

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(D_0 + \widehat{d}(t)) &= \left( D_0 + \widehat{d}(t) \right) \mathbf{D}_1 + \left( D'_0 - \widehat{d}(t) \right) \mathbf{D}_2 \\
&= D_0 \mathbf{D}_1 + D'_0 \mathbf{D}_2 + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{d}(t) \\
&= \mathbf{D}(D_0) + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{d}(t) \\
&= \mathbf{D} + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{d}(t)
\end{aligned} \tag{79}$$

gde je

$$\mathbf{D} \triangleq \mathbf{D}(D_0). \tag{80}$$

Konačno, zamenom u jednačinu izlaza nelinearnog dinamičkog modela se dobija

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{Y}_0 + \widehat{\mathbf{y}}(t) \\
&= \left( \mathbf{C} + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \widehat{d}(t) \right) (\mathbf{X}_0 + \widehat{\mathbf{x}}(t)) + \left( \mathbf{D} + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{d}(t) \right) (\mathbf{U}_0 + \widehat{\mathbf{u}}(t)) \\
&= \mathbf{C} \mathbf{X}_0 + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \mathbf{X}_0 \widehat{d}(t) + \mathbf{C} \widehat{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \widehat{\mathbf{x}}(t) \widehat{d}(t) \\
&\quad + \mathbf{D} \mathbf{U}_0 + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{U}_0 \widehat{d}(t) + \mathbf{D} \widehat{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{\mathbf{u}}(t) \widehat{d}(t)
\end{aligned} \tag{81}$$

odakle se grupisanjem članova dobija

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{Y}_0 + \widehat{\mathbf{y}}(t) \\
&= \mathbf{C} \mathbf{X}_0 + \mathbf{D} \mathbf{U}_0 \\
&\quad + \mathbf{C} \widehat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \widehat{\mathbf{u}}(t) + ((\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \mathbf{X}_0 + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{U}_0) \widehat{d}(t) \\
&\quad + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \widehat{\mathbf{x}}(t) \widehat{d}(t) + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{\mathbf{u}}(t) \widehat{d}(t).
\end{aligned} \tag{82}$$

Kako je već izvedeno u odeljku u kome je razmatrano ustaljeno stanje, tj. mirna radna tačka, jednosmerne komponente koje predstavljaju prvu grupu članova zadovoljavaju

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{C} \mathbf{X}_0 + \mathbf{D} \mathbf{U}_0. \tag{83}$$

Time se jednačine po jednosmernim komponentama izdvajaju iz sistema jednačina po trenutnim vrednostima, a ostatak su jednačine po varijacijama promenljivih u odnosu na vrednosti koje imaju u mirnoj radnoj tački. Linearizacija jednačina se vrši zanemarivanjem treće grupe članova koja sadrži međusobne proizvode varijacija promenljivih

$$(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \widehat{\mathbf{x}}(t) \widehat{d}(t) + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \widehat{\mathbf{u}}(t) \widehat{d}(t) \approx \mathbf{0} \tag{84}$$

pa se linearizovani sistem jednačina izlaza po varijacijama promenljivih svodi na

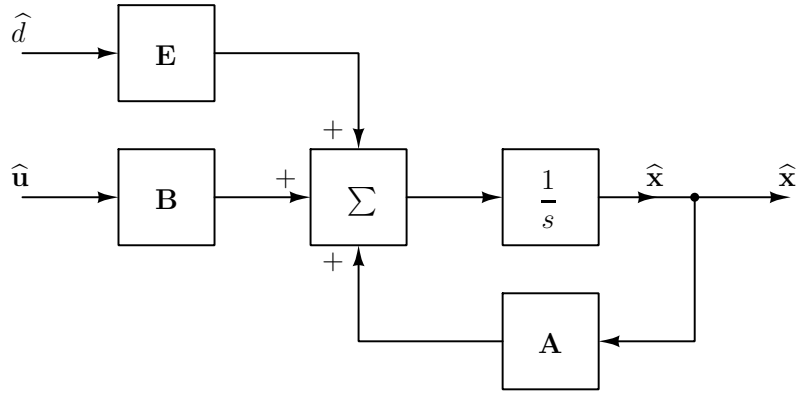
$$\widehat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \widehat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \widehat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F} \widehat{d}(t) \tag{85}$$

gde je

$$\mathbf{F} \triangleq (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \mathbf{X}_0 + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{U}_0. \tag{86}$$

Kao i u slučaju jednačina stanja, povoljno je jednačine izlaza napisati u matricnoj formi tako što će varijacija upravljačke promenljive  $\widehat{d}(t)$  ući u vektor ulaznih promenljivih, što se korišćenjem blok matrica efikasno zapisuje kao

$$\widehat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \widehat{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{D} | \mathbf{F}] \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}(t) \\ \widehat{d}(t) \end{bmatrix}. \tag{87}$$



Slika 1: Strukturni blok dijagram koji odgovara sistemu jednačina stanja.

## 9 Funkcije prenosa konvertora

Za sintezu regulatora u frekvencijskom domenu, potrebno je raspolagati funkcijama prenosa konvertora. Izlazne promenljive tih funkcija prenosa su promenljive stanja, čije su kompleksne slike sadržane u  $\hat{\mathbf{x}}(s)$ , i promenljive izlaza, čije su kompleksne slike sadržane u  $\hat{\mathbf{y}}(s)$ . Ulazne promenljive po kojima se funkcije prenosa određuju su sadržane u vektoru ulaza, sa kompleksnim slikama u  $\hat{\mathbf{u}}(s)$ , što se dopunjuje kompleksnom slikom varijacije upravljačke promenljive,  $d(s)$ . Dakle, za karakterizaciju je potrebno odrediti čitav niz funkcija prenosa, a sve one će deliti isti spektar polova.

Određivanje funkcija prenosa počinje transformacijom linearizovanog sistema jednačina stanja (73) u kompleksni oblik

$$s \hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{E} \hat{d}(s) \quad (88)$$

što se može predstaviti strukturnim blok dijagramom prikazanim na slici 1. Gornji sistem jednačina je moguće rešiti po promenljivim vektora stanja, pa ga je u tom cilju povoljno transformisati u

$$(s \mathbf{I} - \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{E} \hat{d}(s). \quad (89)$$

Ovde je povoljno definisati sistemsku matricu  $\mathbf{S}(s)$  kao

$$\mathbf{S}(s) \triangleq s \mathbf{I} - \mathbf{A}. \quad (90)$$

Sopstvene vrednosti sistemske matrice, određene korenima karakterističnog polinoma

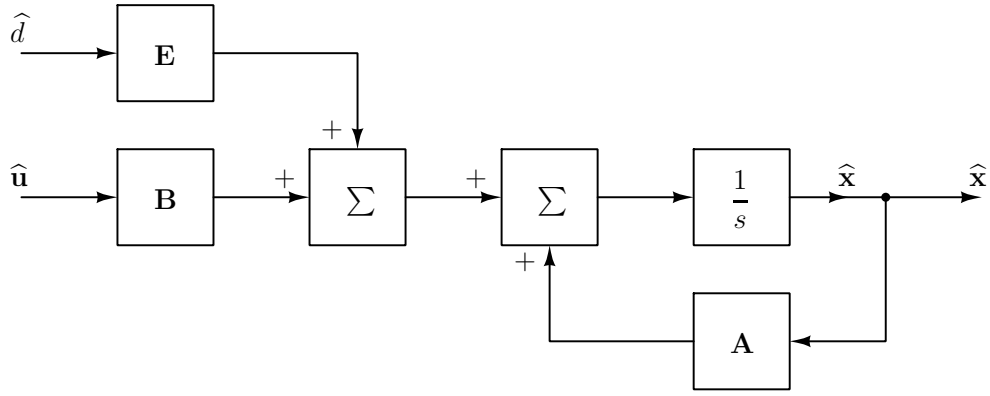
$$\det(\mathbf{S}(s)) = 0 \quad (91)$$

su sopstvene frekvencije analiziranog konvertora i one su polovi svih funkcija prenosa razmatranog sistema.

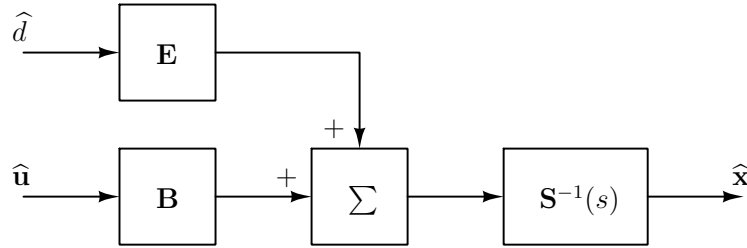
Nakon definisanja sistemske matrice, funkcije prenosa od ulaznih promenljivih i upravljačke promenljive do promenljivih stanja su određene sa

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (\mathbf{S}^{-1}(s) \mathbf{B}) \hat{\mathbf{u}}(s) + (\mathbf{S}^{-1}(s) \mathbf{E}) \hat{d}(s). \quad (92)$$

Uvođenje sistemske matrice i rešavanje sistema jednačina (88) po vektoru promenljivih stanja se može ilustrovati transformacijama strukturnog blok dijagrama sa slike 1. Na strukturnom blok dijagramu sa slike 2 je izdvojen deo koji se odnosi na homogeni deo sistema jednačina stanja, čijim rešavanjem se dolazi do sistemske matrice, sopstvenih frekvencija ili polova sistema, što rezultuje strukturnim blok dijagramom sa slike 3, koji se u praksi koristi kod sinteze regulatora u frekvencijskom domenu.



Slika 2: Transformisani strukturni blok dijagram koji odgovara sistemu jednačina stanja.



Slika 3: Strukturni blok dijagram funkcija prenosa konvertora.

Kada su određene funkcije prenosa do promenljivih stanja, funkcije prenosa do promenljivih izlaza se određuju iz algebarskih veza (85) prevedenih u kompleksni domen

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{F} \hat{d}(s) \quad (93)$$

što se nakon zamene (92) i sređivanja svodi na

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = (\mathbf{C} \mathbf{S}^{-1}(s) \mathbf{B} + \mathbf{D}) \hat{\mathbf{u}}(s) + (\mathbf{C} \mathbf{S}^{-1}(s) \mathbf{E} + \mathbf{F}) \hat{d}(s). \quad (94)$$

Na ovaj način je dobijen model sistema, usrednjen i linearizovan u okolini mirne radne tačke, sveden na funkcije prenosa. Takav model sistema je povoljan za sintezu regulatora u frekvencijskom domenu.

## 10 Opseg promene promenljivih stanja tokom periode prekidanja i granice važenja modela

Analizom usrednjenog modela se može doći i do procene opsega u kome se nalaze promenljive stanja tokom periode prekidanja, što je od značaja za proveru pretpostavke da konvertor radi u kontinualnom režimu. Procena je zasnovana na pretpostavci da konvertor radi u režimu koji nije daleko od ustaljenog stanja.

U prvoj prekidačkoj kombinaciji, kada je prekidač provodan, a dioda neprovodna, konvertor je karakterisan sistemom jednačina stanja (7). Nakon što je graničnim procesom  $T_S \rightarrow 0$  diskretan niz vrednosti upravljačke promenljive  $d_k$  pretvoren u kontinualnu funkciju vremena  $d(t)$ , povratkom na konačne razlike za procenu varijacije promenljivih stanja dobija se

$$\frac{2 \Delta \mathbf{x}(t)}{d(t) T_S} = \mathbf{A}_1 \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \mathbf{B}_1 \langle \mathbf{u}(t) \rangle \quad (95)$$

pa se talasnost promenljivih stanja procenjuje kao kontinualna funkcija vremena

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \frac{d(t) T_S}{2} (\mathbf{A}_1 \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \mathbf{B}_1 \langle \mathbf{u}(t) \rangle). \quad (96)$$

Korišćenjem ovog izraza se može proceniti da li je pretpostavka da konvertor radi u kontinualnom režimu zadovoljena. Konkretno, posmatra se struja kalema  $i_L(t)$ , koja je element vektora  $\mathbf{x}(t)$ , a koja prolaskom kroz nulu uzrokuje prestanak provođenja diode i prelazak u diskontinualni režim rada. Ako je

$$\Delta i_L(t) < \langle i_L(t) \rangle \quad (97)$$

pretpostavka rada u kontinualnom režimu je ispunjena, dok u protivnom konvertor prelazi u diskontinualni režim rada i razmatrani model više ne važi.

Primenom iste metodologije na preostali deo periode dobija se alternativna procena talasnosti promenljivih stanja

$$\Delta \mathbf{x}(t) = -\frac{d'(t) T_S}{2} (\mathbf{A}_2 \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \mathbf{B}_2 \langle \mathbf{u}(t) \rangle). \quad (98)$$

Međusobno slaganje dve ponuđene procene je mera vrednosti pretpostavke da konvertor radi u režimu bliskom ustaljenom stanju.

Kao kompromis između dva alternativna načina procene talasnosti promenljivih stanja, (96) i (98), može se koristiti njihova aritmetička sredina

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \frac{T_S}{4} ((\mathbf{A}_1 d(t) - \mathbf{A}_2 d'(t)) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + (\mathbf{B}_1 d(t) - \mathbf{B}_2 d'(t)) \langle \mathbf{u}(t) \rangle) \quad (99)$$

što je naročito povoljno kod računarske simulacije prekidačkih konvertora.

Na osnovu procene talasnosti promenljivih stanja, vektor promenljivih stanja tokom periode prekidanja se može nalaziti u opsegu

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle - |\Delta \mathbf{x}(t)| \leq \mathbf{x}(t) \leq \langle \mathbf{x}(t) \rangle + |\Delta \mathbf{x}(t)| \quad (100)$$

gde se pod apsolutnom vrednošću primenjenom na vektor podrazumeva određivanje apsolutne vrednosti elemenata vektora pojedinačno. Takođe, nejednakost se odnosi pojedinačno na odgovarajuće elemente vektora koji se porede. Jednačina (100) predstavlja obvojnici trenutne vrednosti promenljivih stanja.

## 11 Zaključak

U ovom poglavlju je uveden formalni postupak usrednjavanja i linearizacije jednačina stanja. Ovaj postupak vodi ka linearnom stacionarnom modelu konvertora u okolini mirne radne tačke iz koga se mogu dobiti funkcije prenosa povoljne za sintezu regulatora u frekvencijskom domenu. Opisani metod je povoljan za računarsku implementaciju pošto je potpunom formalizacijom sveden na algoritam.

U postupku formiranja usrednjenog linearizovanog modela, prvo je usrednjavanjem i uvođenjem aproksimacije male promene promenljivih stanja i promenljivih ulaza u okviru jedne periode prekidanja izveden diskretan usrednjen model konvertora, karakterisan sistemom diferencnih jednačina. U cilju smanjenja uticaja aproksimacija, graničnim procesom u kome perioda prekidanja teži nuli izveden je nelinearni dinamički model konvertora, karakterisan sistemom običnih nehomogenih nestacionarnih linearnih diferencijalnih jednačina u normalnoj formi po promenljivim stanja i sistemom algebarskih jednačina po izlaznim promenljivim sa vremenom kao kontinualnom promenljivom.

Uvođenjem perturbacije usrednjenih elemenata vektora promenljivih stanja ( $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ ), vektora promenljivih ulaza ( $\langle \mathbf{u}(t) \rangle$ ), upravljačke promenljive ( $d(t)$ ) i vektora promenljivih izlaza ( $\langle \mathbf{y}(t) \rangle$ ) u okolini mirne radne tačke, prvo su izvedene jednačine konvertora koje odgovaraju ustaljenom stanju (mirna radna tačka), koje se mogu interpretirati kao analiza primenom aproksimacije male talasnosti promenljivih stanja. Primenom linearizacije zanemarivanjem međusobnih proizvoda perturbacija je potom izveden linearizovan dinamički model konvertora u okolini mirne radne tačke. Jedna od posledica linearizacije je efektivno uvrštavanje varijacije upravljačke promenljive  $\hat{d}(t)$  u vektor ulaznih promenljivih. Na kraju, izvedene su i procene opsega promenljivih stanja tokom periode prekidanja koje predstavljaju obvojnici trenutne vrednosti za promenljive stanja, koje služe za proveru pretpostavke da konvertor radi u kontinualnom režimu.