**Podsetnik:**

**<u>Statističke relacije</u>**

**Matematičko očekivanje (srednja vrednost):**

$\mu = E\left[X\right] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k$ - Diskretna sl. promenljiva

$\mu = E\left[X\right] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ - Kontinualna sl. promenljiva

**Varijansa:** $Var\left(X\right) = \sigma_X^2 = E\left[\left(X - E\left[X\right]\right)^2\right]$

**Standardna devijacija:** $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu\right)^2}$ - Diskretna sl. promenljiva

$\sigma_X = \sqrt{\int_{\mathbb{R}}\left(x-\mu\right)^2 f(x)dx}$ - Kontinualna sl. promenljiva

Šum kvantizacije se u slučaju da su zadovoljeni određeni uslovi može smatrati slučajnim belim šumom i na njega se može primeniti statistička analiza. Tako je snaga šuma zapravo varijansa slučajnog procesa šuma kvantizacije (videti poglavlje 16 iz knjige M.Popović – Digitalna obrada signala).

Ako se linearni sistem čiji je impulsni odziv $h[n]$ pobudi belim šumom srednje vrednosti $m_x$ i varijanse $\sigma_x$, izlaz sistema je šum čija je srednja vrednost

$$m_y = m_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} h\left[n\right]$$

i varijansa

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2\left[n\right].$$

Tako, uticaj šuma zaokruživanja se može predstaviti na isti način samo se za impulsni odziv uzima impulsni odziv od mesta izvora šuma do izlaza.

## Zadatak 1 – Kvantovanje ulaznog signala

Ulaz u sistem koji je dat diferencnom jednačinom

$$y[n] = 0,999y[n-1] + x[n]$$

zaokružen je na $b$ = 8 bita. Izračunati snagu šuma na izlazu filtra prouzrokovanog šumom kvantizacije na ulazu.

## Rešenje:

Može se napisati da je $y[n] = 0,999y[n-1] + e[n]$, gde je $e[n]$ beli šum, uniformno raspoređen u intervalu $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2^9}, \frac{1}{2^9}\right]$.

Srednja snaga šuma na izlazu je:

$$E\left[y[n]^2\right] = 0,999^2 E\left[y[n-1]^2\right] + E\left[e[n]^2\right],$$

odakle sledi da je:

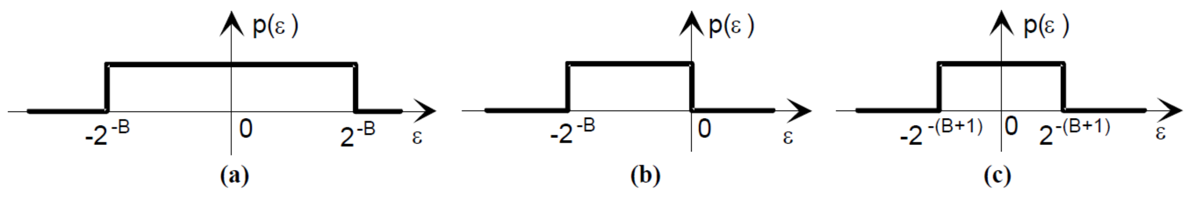
$$\left(1-0,999^2\right) E\left[y[n]^2\right] = E\left[e[n]^2\right].$$

Funkcija gustine verovatnoće greške kvantizacije u slučaju zaokruživanja je uniformna na opsegu $\left[-\frac{1}{\Delta/2}, \frac{1}{\Delta/2}\right]$ i jednaka je $\frac{1}{\Delta}$, pa je:

$$E\left[e[n]^2\right] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Prema tome, snaga šuma na izlazu je:

$$E\left[y[n]^2\right] = \frac{1}{\left(1-0,999^2\right)} E\left[e[n]^2\right] = \frac{\Delta^2/12}{1-0,999^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2^8}\right)^2 \frac{1}{1-0,999^2} = 6,361 \cdot 10^{-4}$$




*Slika 1 – Funkcije gustine verovatnoće kvantovanja za u slučaju a) odsecanja ako su brojevi predstavljeni u kodu znak i apsolutna vrednost, b) odsecanje ako su brojevi predstavljeni u drugom komplementu i c) zaokruživanje ako su brojevi predstavljeni u drugom komplementu (videti poglavlje 16 iz knjige M.Popović – Digitalna obrada signala)*

## Zadatak 2 – Kvantovanje proizvoda

Dat je sistem čija je funkcija prenosa

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

a) Nacrtati realizaciju ovog sistema kao kaskadnu realizaciju jednog FIR i dva IIR sistema.

b) Pod pretpostavkom da je filtar potrebno implementirati u fixed-point aritmetici korišćenjem $b+1$ bita (označeni brojevi), odrediti varijansu kvantizacionog šuma na izlazu filtra koji nastaje usled zaokruživanja proizvoda na $b+1$bita.

## Rešenje:

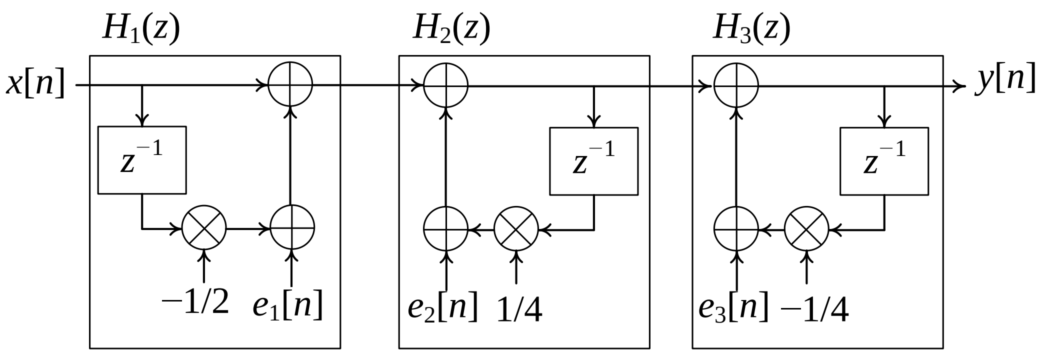
Funkcija prenosa se može predstaviti proizvodom jedne FIR i dve IIR funkcije prenosa:

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)H_3(z)=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

Impulsni odzivi pojedinačnih sistema su redom:

$$h_1[n]=\left[1,-\frac{1}{2}\right],\ h_2[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\ \text{i}\ h_3[n]=\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Blok dijagram sistema sa označenim izvorima šuma kvantizacije je prikazan na slici 2.




*Slika 2 – Realizacija filtra i izvori šuma kvantizacije*

Snaga šuma kvantizacije na izlazu svakog množača je ista i iznosi

$$\sigma_{e1}^2=\sigma_{e2}^2=\sigma_{e3}^2=\sigma_e^2=\frac{\Delta^2}{12}=\frac{2^{-2b}}{12}.$$

Iako to nije uvek slučaj, izvori šuma se smatraju statistički nezavisnim, pa je snaga šuma na izlazu zbir doprinosa svakog izvora pojedinačno.

Doprinos izvora $e_3$ je

$$\sigma_{y3}^2=\sigma_{e3}^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_3^2[n]=\frac{\Delta^2}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\Delta^2}{12}\cdot\frac{1}{1-(1/4)^2}=\frac{16}{15}\frac{\Delta^2}{12}.$$

Impulsni odziv sistema 1 ne utiče na snagu šuma kvantizacije na izlazu jer se generator šuma nalazi na samom izlazu sistema i njegovi odbirci se nigde ne množe sa keoficijentima impulsnog odziva sistema 1. Tako, na ulazu sistema 2 postoje dva izvora šuma $e_1$ i $e_2$ koji doprinose izlazu jednako i to kao

$$\sigma_{y1}^2 = \sigma_{y2}^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_4{}^2[n],$$

gde je

$$h_4[m] = h_2[n] * h_3[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-n} u[m-n] = \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-n} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^m u[m], & \text{za parno } m \\ 0, & \text{za neparno } m \end{cases}$$

Na osnovu toga je doprinos snazi izlaznog šuma od izvora $e_1$ i $e_2$

$$\sigma_{y1,2}^2 = 2\sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_4{}^2[n] = 2\sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} = 2\sigma_e^2 \frac{1}{1-(1/16)} = \frac{\Delta^2}{6} \frac{256}{255}.$$

Ukupna snaga šuma na izlazu je

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y1,2}^2 + \sigma_{y3}^2 = 3,0745 \frac{\Delta^2}{12}.$$

Komentar: Primetiti da su izrazi za šum kvantizacije na izlazu IIR filtra 1. reda koji potiče od kvantovanja proizvoda isti kao izraz za šum kvantizacije koji potiče od ulaznog signala iz prethodnog zadatka.

## Zadatak 3 – Granični ciklusi

Dat je sistem čija opisan diferencnom jednačinom

$$y[n] = \frac{7}{8}y[n-1] - \frac{5}{8}y[n-2] + x[n].$$

a) Ako se zaokruživanje vrši nakon svih sabiranja i to na 4 bita (3 bita + 1 za znak – u drugom komplementu) i ako su početni uslovi $y[-2] = y[-1] = 0$, ispitati da li dolazi do graničnog ciklusa usled kvantizacije ako se sistem pobudi impulsom $x[n] = \frac{3}{8}\delta[n]$.

b) Ako se zaokruživanje vrši nakon svih sabiranja i to na 4 bita (3 bita + 1 za znak – u drugom komplementu) i ako su početni uslovi $y[-2] = y[-1] = 0$, ispitati da li dolazi do graničnog ciklusa usled prekoračenja ako se sistem pobudi impulsom $x[n] = -\frac{3}{4}\delta[n] - \frac{5}{8}\delta[n-1]$.

## Rešenje:

a) Videti poglavlje 16.5.1 iz knjige M.Popović – Digitalna obrada signala.

Kvantizacija se može predstaviti operatorom $Q_r\{\bullet\}$, tj. izraz $\hat{x} = Q_r\{x\}$ znači da $\hat{x}$ predstavlja zaokružen broj $x$ na određeni broj bita. U našem slučaju je broj bita 4, pa $\hat{x}$ može uzeti neku od vrednosti $\left\{-1, -\frac{7}{8}, -\frac{6}{8}, \ldots, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right\}$. Izračunavanjem se dobija sledeća sekvenca izlaza:

$$\begin{aligned}
y(0) &= Q_r\left\{\frac{3}{8}\right\} = \frac{3}{8} & \qquad y(7) &= Q_r\left\{\frac{7}{64}\right\} = \frac{1}{8} \\
y(1) &= Q_r\left\{\frac{21}{64}\right\} = \frac{3}{8} & \qquad y(8) &= Q_r\left\{\frac{1}{32}\right\} = 0 \\
y(2) &= Q_r\left\{\frac{3}{32}\right\} = \frac{1}{8} & \qquad y(9) &= Q_r\left\{-\frac{5}{64}\right\} = -\frac{1}{8} \\
y(3) &= Q_r\left\{-\frac{1}{8}\right\} = -\frac{1}{8} & \qquad y(10) &= Q_r\left\{-\frac{7}{64}\right\} = -\frac{1}{8} \\
y(4) &= Q_r\left\{-\frac{3}{16}\right\} = -\frac{1}{8} & \qquad y(11) &= Q_r\left\{-\frac{1}{32}\right\} = 0 \\
y(5) &= Q_r\left\{-\frac{1}{32}\right\} = 0 & \qquad y(12) &= Q_r\left\{\frac{5}{64}\right\} = \frac{1}{8} \\
y(6) &= Q_r\left\{\frac{5}{64}\right\} = \frac{1}{8} & \qquad & \vdots
\end{aligned}$$

Iz ove sekvence se vidi da postoji granični ciklus usled zaokruživanja i to oscilatornog karaktera.

b) Videti poglavlje 16.5.2 iz knjige M.Popović – Digitalna obrada signala.

Prekoračenje se može predstaviti operatorom $R[\bullet]$, tj. ako je opseg broja $x$ između $-1$ i 1, tada je

$$R[x]=\begin{cases} x-2, \text{ za } x\geq 1 \\ x, \text{ za } -1\leq x<1. \\ x+2, \text{ za } x<-1 \end{cases}$$

Izračunavanjem se dobija sledeća sekvenca izlaza:

$$\begin{aligned}
y(0) &= Q_r\left\{R\left[-\frac{3}{4}\right]\right\}=Q_r\left\{-\frac{3}{4}\right\}=-\frac{3}{4} \\
y(1) &= Q_r\left\{R\left[-\frac{41}{32}\right]\right\}=Q_r\left\{\frac{23}{32}\right\}=\frac{3}{4} \\
y(2) &= Q_r\left\{R\left[\frac{9}{8}\right]\right\}=Q_r\left\{-\frac{7}{8}\right\}=-\frac{7}{8} \\
y(3) &= Q_r\left\{R\left[-\frac{79}{64}\right]\right\}=Q_r\left\{\frac{49}{64}\right\}=\frac{3}{4} \\
y(4) &= Q_r\left\{R\left[\frac{77}{64}\right]\right\}=Q_r\left\{-\frac{51}{64}\right\}=-\frac{3}{4} \\
y(5) &= Q_r\left\{R\left[-\frac{9}{8}\right]\right\}=Q_r\left\{\frac{7}{8}\right\}=\frac{7}{8} \\
y(6) &= Q_r\left\{R\left[\frac{79}{64}\right]\right\}=Q_r\left\{-\frac{49}{64}\right\}=-\frac{3}{4} \\
y(7) &= Q_r\left\{R\left[-\frac{77}{64}\right]\right\}=Q_r\left\{\frac{51}{64}\right\}=\frac{3}{4} \\
y(8) &= Q_r\left\{R\left[\frac{9}{8}\right]\right\}=Q_r\left\{-\frac{7}{8}\right\}=-\frac{7}{8} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Iz ove sekvence se vidi da postoji granični ciklus oscilatornog karaktera koji nastaje usled prekoračenja kod sabiranja.